

Приложение к журналу

КВАНТ

№1/2004

Ю.П.Соловьев

ИЗБРАННЫЕ СТАТЬИ

Бюро



Квантум

Ю.П.Соловьев

ИЗБРАННЫЕ СТАТЬИ



Москва 2004
Бюро Квантум

УДК 51
ББК 22.1
С43

Приложение
к журналу «Квант»
№1/2004

**С43 Соловьев Ю.П. Избранные статьи. – М.: Бюро Квантум, 2004. – 128 с. – (Прил. к журналу «Квант» №1/2004)
ISBN 5-85843-048-1**

Книга представляет собой сборник статей одного из лучших авторов «Кванта» Ю.П.Соловьева, опубликованных в журнале в разные годы. Статьи сборника посвящены разным разделам математики, а также истории математики.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, а также для всех, кто интересуется математикой.

ББК 22.1

ISBN 5-85843-048-1

© Бюро Квантум,
«Квант», 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Открытие Вселенной	5
Творцы новой астрономии	17
Христиан Гюйгенс	31
«Ради отечества, наук и славы»	38
Эварист Галуа	44
Николай Иванович Лобачевский	57
Инверсоры	67
Комплексные числа	76
Арифметика эллиптических кривых	89
Кватернионы	100
Геометрия скользящих векторов	110
Старый алгоритм	123

ПРЕДИСЛОВИЕ

Перед вами сборник статей выдающегося математика и замечательного педагога Юрия Петровича Соловьева. Крупный ученый, профессор механико-математического факультета МГУ, он более 20 лет сотрудничал с журналом «Квант», был членом редакционной коллегии журнала, а с 1981 по 1994 г. – заместителем главного редактора. В эти годы облик журнала во многом определялся Юрием Петровичем.

Необыкновенно разносторонний, энциклопедически образованный человек, знаток не только математики, но и истории, в том числе истории науки, Ю.П.Соловьев написал для «Кванта» немало блестящих статей, часть из которых мы и предлагаем вашему вниманию. Многие из вошедших в сборник статей посвящена истории науки и ее творцам, таким гигантам, как Н.И. Лобачевский, Х.Гюйгенс, Э.Галуа – ученым, оказавшим огромное влияние на дальнейшее развитие математики. Глубокое знание истории, понимание ее тончайших закономерностей позволило Юрию Петровичу создать истинные шедевры математической литературы, интересные не только юным математикам, но и профессионалам. Кроме того, читатель найдет в сборнике и некоторые чисто математические статьи Ю.П.Соловьева. Они отличаются глубиной, четкостью и доступностью изложения. О самых сложных и трудных вещах Юрий Петрович умел говорить просто, понятно и увлекательно.

Мы уверены, что эта книга доставит истинное интеллектуальное удовольствие читателям.

ОТКРЫТИЕ ВСЕЛЕННОЙ

Из всех картин природы, развертывающихся перед человеческими глазами, самая величественная – картина звездного неба. С древнейших времен эта картина будила человеческое воображение, вызывая к жизни то могучее интеллектуальное течение, которое мы теперь называем наукой. О том, как человек проникал в тайну мироздания, в тайну движения небесных тел – наш рассказ.

Первые воззрения древних на мироздание основывались на непосредственно видимом. Для древних египтян и вавилонян Вселенная отождествлялась с Землей, которая представлялась громадным диском, плавающим по беспредельному океану. Небо они представляли опрокинутой чашей, опирающейся на плоскость, с вкрапленными во внутреннюю поверхность чаши звездами.

Упорядоченные конфигурации звезд называются созвездиями. Созвездия почти не меняются день ото дня, год от года и даже век от века. За ночь звезды поворачиваются относительно некоторой неподвижной точки, находящейся ныне вблизи Полярной звезды, будто чаша вращается как единое целое вокруг оси, проходящей через эту точку и глаз наблюдателя. Тщательные наблюдения показывают, что чаша совершает один оборот за 23 часа 56 минут.

Из-за вращения чаши некоторые звезды уходят за горизонт на западе, тогда как другие восходят на востоке. Это наблюдение наводит на мысль, что чаша представляет собой часть полной сферы, причем звезды располагаются на ее поверхности. Эта сфера называется небесной сферой или сферой неподвижных звезд. Две неподвижные точки, в которых небесная сфера пересекает ось вращения, называются полюсами мира. Воображаемая окружность на небесной сфере, точки которой равноудалены от обоих полюсов, называется небесным экватором.

¹ Опубликовано в «Кванте» №5 за 1992 г.

Шарообразная Земля

Итак, наблюдения за суточным движением звезд привели древних астрономов к представлению о небесной сфере. Сделать вывод о том, что Земля имеет форму шара, оказалось трудней. Мысль о шарообразности Земли высказали древнегреческие ученые в начале V века до новой эры. К этой мысли они пришли

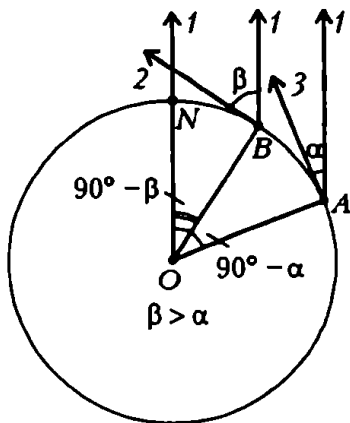


Рис.1. 1 - направление на северный полюс мира; 2 - направление на горизонт в точке B; 3 - направление на горизонт в точке A

здесь в указанное время не исчезают, и в гениальном озарении понял, что причина этому - кривизна поверхности Земли.

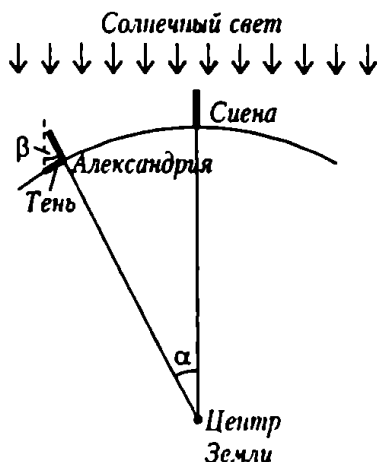


Рис.2

на основании рассказов путешественников, которые заметили, что высота северного полюса мира возрастает по мере перемещения к северу и уменьшается при движении в южном направлении (рис. 1).

Первое настоящее измерение радиуса Земли было проведено египетским греком Эратосфеном (276–195 гг. до н.э.), уроженцем города Сиена (ныне Асуан) на юге Египта. Еще будучи подростком он заметил, что в Сиене ежегодно 21 июня в полдень Солнце находится точно над головой, и вертикальные стволы деревьев не отбрасывают теней. Позже в Александрии, расположенной на севере Египта, он обнаружил, что тени

Александрия находится на 480 миль севернее Сиены, и когда Солнце в зените над Сиеной, над Александрией оно должно располагаться на некотором угловом расстоянии от зенита. Этот угол можно измерить по тени вертикального ствола дерева или колонны в Александрии (рис.2). Угол определяется по высоте дерева или колонны и измеренной длине тени в Александрии в момент, когда в Сиене тень не отбрасывается (полдень 21 июня). Углы α и β равны как внутренние накрест лежащие углы при пересечении параллельных пря-

мых. Измеренное значение составляло $\alpha = 7^\circ$, следовательно, угол в 7° с вершиной в центре Земли стягивался на поверхности дугой в 480 миль. Поскольку в окружности 360° , длина окружности Земли по меридиану должна составлять 24 000 миль, а ее радиус – около 4000 миль (точные современные значения составляют 24 989 миль для длины окружности и 3950 миль для радиуса).

Идея шарообразной Земли позволила упростить геометрию мироздания. Естественно было считать, что земная и небесная сферы концентричны, а ось вращения небесной сферы служит продолжением полярной оси Земли.

Блуждающие звезды

Кроме неподвижных звезд, на небесной сфере можно наблюдать тела, положение которых меняется день ото дня. Такие тела называются планетами. В переводе с древнегреческого планета – «блуждающая звезда». С древнейших времен было известно семь таких «блуждающих звезд»: Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер и Сатурн.

Чтобы понять, как движется Солнце по небесной сфере, вспомним, что сутки (24 часа) – это время между двумя его последовательными кульминациями. Тот факт, что небесная сфера совершает полный оборот вокруг оси за время чуть меньшее суток (23 часа 56 минут), означает, что Солнце перемещается по небесной сфере в направлении, противоположном вращению небесной сферы. Поэтому восход Солнца ежедневно запаздывает по сравнению с восходом звезд на 4 минуты. Отмечая ежедневное положение Солнца относительно звезд в момент восхода, можно проследить его траекторию на небесной сфере. Оказывается, что эта траектория представляет собой еще одну окружность, центр которой совпадает с центром Земли, а плоскость наклонена под углом $23^\circ 30'$ к плоскости небесного экватора. По этой окружности, называемой эклиптикой, Солнце движется в направлении с запада на восток с почти постоянной угловой скоростью, равной примерно 1° в сутки, совершая полный оборот за 365 дней и примерно 6 часов.

Луна также непрерывно перемещается относительно звезд. Ее траектория представляет собой окружность, в центре которой находится Земля. Плоскость этой окружности наклонена к эклиптике под углом 5° . Луна почти равномерно движется вдоль своей траектории в том же направлении, что и Солнце, т.е. обратно направлению суточного вращения небесной сферы, совершая полный оборот за время немногим более 27 суток.

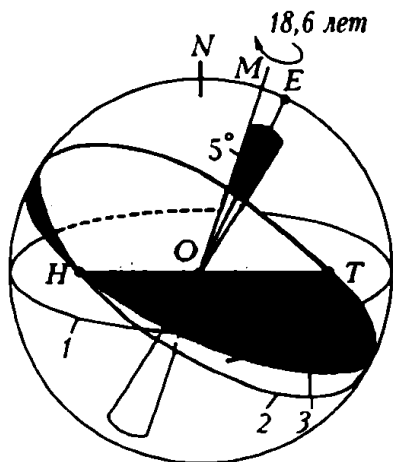


Рис.3. 1 – экватор; 2 – эклиптика; 3 – путь Луны за 27 суток. Траектория Луны представляет собой большой круг на небесной сфере, наклоненный под углом 5° к эклиптике. Полярная ось OM, перпендикулярная к лунной орбите, описывает конус вокруг оси OE, перпендикулярной к плоскости эклиптики, за 18,6 лет

Подобно движению Солнца, движение Луны приводит к тому, что ее восход ежедневно запаздывает относительно восхода звезд, но уже не на четыре минуты, как у Солнца, а почти на целый час (рис.3).

Пять остальных «блуждающих звезд» также движутся по небесной сфере, однако их перемещение гораздо сложнее, чем движение Солнца и Луны (рис.4). Древние астрономы разделили эти пять планет по своим видимым движениям на две группы: нижние (Меркурий, Венера) и верхние (Марс, Юпитер и Сатурн). Движения нижних и верхних планет по сфере неподвижных звезд существенно различаются.

Меркурий и Венера находятся на небе, не удаляясь слишком

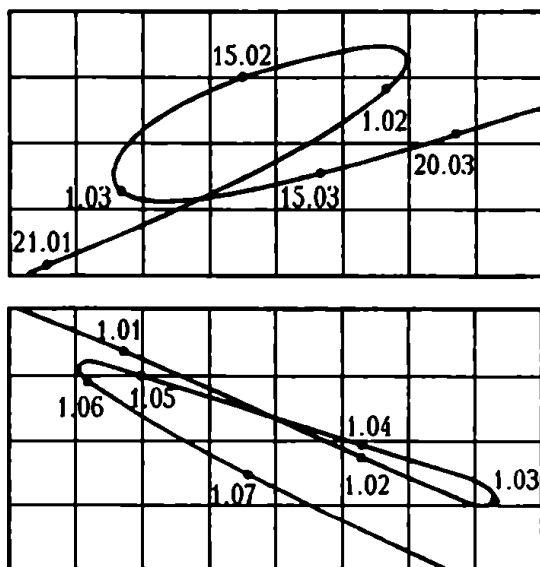


Рис.4. а) Видимое движение Меркурия. б) Видимое движение Марса

далеко от Солнца (28° для Меркурия и 47° для Венеры). Наибольшее угловое удаление планеты от Солнца к востоку называется ее наибольшей восточной элонгацией, к западу – наибольшей западной элонгацией. При наибольшей восточной элонгации планета видна на западе в лучах вечерней зари вскоре после захода Солнца и заходит через некоторое время после него. Затем, попятным движением (т.е. с востока на запад), сначала медленно, а потом все быстрее, планета начинает приближаться к Солнцу, скрывается в его лучах и перестает быть видимой. В это время наступает нижнее соединение планеты с Солнцем. Спустя некоторое время после нижнего соединения планета вновь становится видимой, но теперь уже на востоке, незадолго перед восходом Солнца. В это время, продолжая попятное движение, она постепенно удаляется от Солнца. Замедлив скорость попятного движения и достигнув наибольшей западной элонгации, планета останавливается и меняет направление своего движения на прямое (с запада на восток). Вначале она движется медленно, затем ее движение становится более быстрым. Удаление ее от Солнца уменьшается и, наконец, она скрывается в утренних лучах Солнца – наступает ее верхнее соединение с Солнцем. Спустя некоторое время она снова видна на западе в лучах вечерней зари. Продолжая прямое движение, планета замедляет свою скорость. Достигнув предельного восточного удаления, т.е. наибольшей восточной элонгации, планета останавливается, меняет направление своего движения на попятное, и все повторяется сначала. Период одного такого «колебания» составляет для Меркурия 88 суток, а для Венеры – 225 суток.

Видимые движения верхних планет происходят иначе. Когда верхняя планета видна после захода Солнца в западной части неба, она перемещается среди звезд прямым движением, т.е. с запада на восток, как и Солнце. Но скорость ее движения меньше, чем у Солнца, которое постепенно нагоняет планету, и она на некоторое время перестает быть видимой, т.е. восходит и заходит почти одновременно с Солнцем. Затем, когда Солнце обгонит планету, она становится видимой на востоке перед восходом Солнца. Скорость ее прямого движения постепенно уменьшается, планета останавливается и затем начинает перемещаться среди звезд попятным движением, с востока на запад. Через некоторое время планета снова останавливается, меняет направление своего движения на прямое, снова ее с запада нагоняет Солнце и она опять перестает быть видимой – и все явления повторяются в том же порядке.

Первые модели мира

Эвдокс. Первоначальная модель мироздания была очень проста. Длительные наблюдения привели древнегреческих ученых к убеждению, что наряду с Землей шарообразными являются и другие планеты. Более того, с течением времени для двух небесных светил, которые казались самыми большими – Солнца и Луны, – было получено так много данных, что их стали считать телами, до известной степени родственными Земле. Не было никаких причин считать другие «блуждающие звезды» непохожими на Солнце и Луну. Стало быть, все они более-менее подобны Земле, а различия в их наблюдаемых размерах объясняются различным их удалением от Земли.

Но ведь эти громадные тела, совершающие вечный полет над нашими головами, должны быть достаточно прочно укреплены. Небесная сфера для этого не подходила: планеты движутся независимо от нее. Поэтому греки вообразили семь новых сфер, по одной для каждой планеты. Эти сферы меньше, чем сфера неподвижных звезд, и концентричны с ней. Все семь планетных сфер участвуют в движении сферы неподвижных звезд, обращаясь раз в сутки и, кроме того, совершают еще и независимые вращения.

В дальнейшем из этой модели Пифагор развил идею о музыке сфер: каждая из семи планетных сфер сравнивалась с одним из тонов октавы; восьмой тон представляла сфера неподвижных звезд. Пифагор считал, что колоссальные полые шары, к которым прикреплены такие большие тела, как Солнце и Луна (да и другие планеты), при вращении должны издавать звук, как вращающиеся колеса какого-нибудь механического аппарата. Получающиеся при этом различные тона соединяются в чудесную мелодию, могучие звуки которой наполняют всю Вселенную. И только мы, несовершенные жители Земли, не можем слышать этой небесной музыки, составляющей вечное наслаждение олимпийских богов.

После того как были приобретены дальнейшие знания относительно движения небесных светил, потребовалось соответствующим образом пополнить идею о сферах, составляющих основу порядка Вселенной. В мировоззрении древних философов Греции считалось непоколебимым фактом, что Земля есть центр мира, главное тело мироздания. Поэтому все многочисленные осложнения, которые обнаружили древние ученые, – неравномерные движения планет, попятные движения и т. д., – требовалось объяснять только введением новых сфер, которые общим

движением влияли бы на одно и то же небесное светило. Знаменитый древнегреческий ученый Эвдокс (408–355 гг. до н.э.) построил систему мира, состоящую из 27 сфер: по три для Солнца и Луны, по четыре для пяти остальных планет и большой сферы неподвижных звезд. Однако вскоре выяснилось, что и 27 сфер недостаточно для описания видимого движения планет. Поэтому вскоре последователь Эвдокса афинянин Калипп присоединил к эвдоксовым еще 22 сферы. С течением времени небесная машина становилась все сложнее и сложнее, так что в конце концов настойчиво выступила необходимость более простого и ясного описания.

Гиппарх. В основании всех древних воззрений на мир лежал принцип равномерного движения по окружностям. Впервые этот принцип был поколеблен александрийским ученым Гиппархом (II век до н. э.), открывшим, что длины времен года неодинаковы. Гиппарх первым нашел перигей и апогей Солнца и установил, что вблизи первого оно движется быстрее, чем вблизи второго. Но аксиома о равномерном движении слишком глубоко вошла в плоть и кровь античной науки, и Гиппарх не решился уничтожить ее.

Чтобы объяснить свои открытия, Гиппарх избрал иной выход. Допустим, что Солнце движется с постоянной скоростью по окружности, но центр этой окружности не совпадает с центром Земли, а лежит вне его, где-нибудь в свободном пространстве. Тогда, действительно, нам должно казаться, что Солнце движется неравномерно – быстрее, когда оно идет по части круга, к которой Земля расположена ближе, и медленнее – в противоположной части. Рисунок 5 поясняет этот механизм. Центр

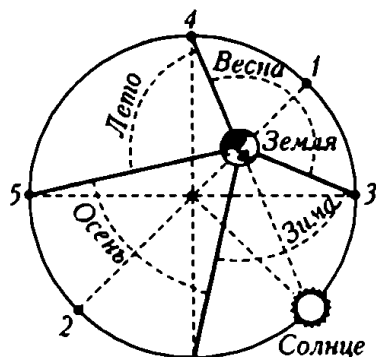


Рис.5. 1 – перигей; 2 – апогей; 3 – весеннее равноденствие; 4 – летнее солнцестояние; 5 – осеннее равноденствие

движения Солнца находится здесь в точке пересечения пунктирных линий, сплошные линии сходятся в центре Земли. Путем проб можно найти подходящее место для точки, находясь в которой наблюдатель будет видеть упомянутые выше особенности движения Солнца, хотя на самом деле оно совершается равномерно по кругу. Линию, соединяющую перигей и апогей, Гиппарх назвал линией апсид. Отношение измеренного по ней расстояния от центра солнечной орбиты до центра Земли к

радиусу орбиты было названо им эксцентриситетом орбиты. Эти названия удержались в астрономическом языке до настоящего времени.

По аналогии с солнечной, центр лунной орбиты Гиппарх также поместил вне Земли. Он вычислил для нее направление линии апсид, эксцентриситет, перигей и апогей. Движения Солнца и Луны Гиппарх определил с удивительной для его времени точностью. Например, по данным, полученным Гиппархом, можно было бы с точностью до одного дня вычислить даты наступления полнолуний даже для нашего времени (более чем на 2000 лет вперед!). Великий александрийский астроном начал также исследовать движения других планет, что представляло более значительные трудности. Но огромный шаг вперед в этом направлении удалось сделать только его земляку и последователю Клавдию Птолемею (II век новой эры).

Система мира Птолемея

Птолемея система мира, которая царила, не оспариваемая никем, около полутора тысяч лет, была основана на наблюдениях и вычислениях Гиппарха. Птолемей изложил свою систему мироздания в знаменитом сочинении «Мегале синтаксис» («Великое построение»), более известном под арабским названием «Альмагест». До конца средневековья этот труд почитался почти

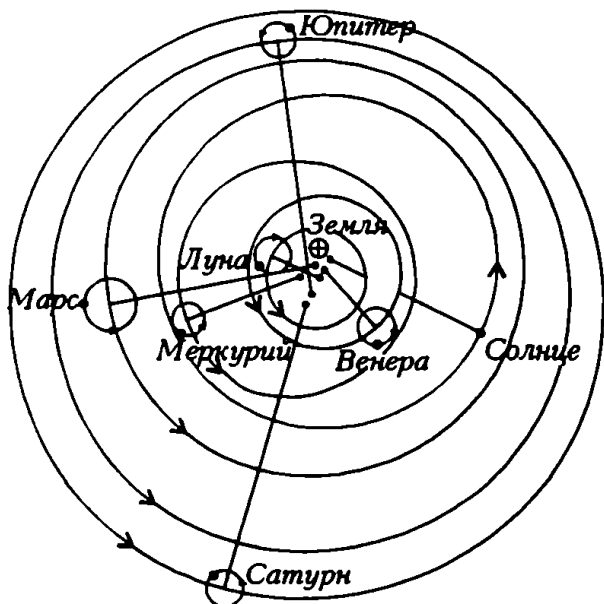


Рис.6. Система мира Птолемея

наравне с божественным откровением. Сомнение в словах «Альмагеста» считалось преступлением.

В основе системы мира Птолемея лежат четыре постулата:

I. Земля находится в центре Вселенной.

II. Земля неподвижна.

III. Все небесные тела движутся вокруг Земли.

IV. Движение небесных тел происходит по окружностям с постоянной скоростью, т.е. равномерно.

Птолемей положил в основу своей системы эксцентрические круги Гиппарха. Однако, согласно Птолемею, все планеты, за исключением Солнца, не обращаются непосредственно по этим кругам – по ним движется центр другого круга, и только по нему обращается планета (рис.6). Круги, по которым обращаются планеты, называются эпициклами; круги, по которым движутся центры эпициклов – деферентами. Деферент Солнца, деференты и эпициклы других планет лежат внутри сферы, на поверхности которой расположены «неподвижные звезды».

Суточное движение всех светил объяснялось вращением всей Вселенной как единого целого вокруг неподвижной Земли. Прямые и попятные движения планет объяснялись следующим образом.

Пусть в определенный момент времени планета находится на эпицикле в точке P_1 (рис.7), а центр эпицикла – на деференте в точке N_1 .

В процессе равномерного кругового движения обеих точек – планеты с угловой скоростью α вокруг точки N_1 и самой точки N_1 как центра эпицикла с угловой скоростью ω вокруг Земли – планета опишет петлю, которую наблюдатель видит в проекции на небесную сферу. Причина образования петли очевидна: в точке P_1 движения по эпициклу и по деференту направлены в одну сторону – справа налево. Описав дугу в 180° , планета движется по эпициклу слева направо. При определенном соотношении между α и ω направление видимого движения в положении, близком P_2 , изменяется – планета здесь совершает попятное движение.

Для каждой планеты Птолемей подобрал относительные размеры радиусов эпицикла и деферента, положения центров деферентов и скорости движения планет по эпициклам и дефе-

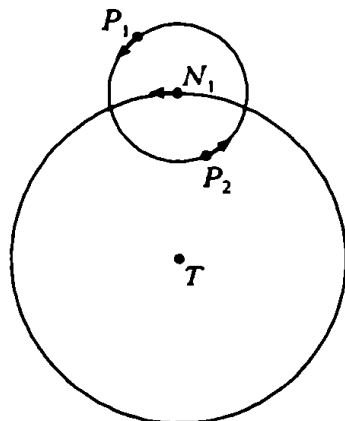


Рис.7

рентам так, чтобы движение получалось близким к реально наблюдаемому. Это оказалось возможным при выполнении некоторых условий, которые Птолемей принял в качестве постулатов. Они сводились к следующему:

1) центры эпициклов нижних планет лежат на направлении от Земли к Солнцу;

2) у всех верхних планет этому направлению параллельны радиусы эпициклов, проведенные в точку положения планеты.

Таким образом, направление на Солнце в системе мира Птолемея оказывалось преимущественным.

Система мира Птолемея не только давала качественное объяснение видимым движениям планет, но и позволяла вычислить их положение на будущее с довольно высокой точностью. По мере повышения точности наблюдений возникали разногласия их с теорией, которые устранялись путем усложнения системы. Например, некоторые «неправильности» в видимых движениях планет, открытые позднейшими наблюдениями, объяснялись тем, что вокруг центра первого эпицикла обращается не планета, а центр второго эпицикла, по окружности которого уже движется планета. Когда и такое построение для какой-либо планеты оказывалось недостаточным, вводили третий, четвертый и т. д. эпициклы, пока положение планеты на окружности последнего из них не давало более или менее сносного согласия с наблюдением. К началу XVI столетия система Птолемея содержала в общей сложности 40 кругов.

Возвратимся еще раз к «Альмагесту» Птолемея и в небольшой таблице приведем числа, которые дал этот великий александрийский ученый для планетных движений по эпициклам и для движений самих эпициклов по деферентам:

Планеты	Суточное движение по эпициклам	Суточное движение центра эпицикла по деференту	Суммарное движение
Солнце	0°0'00,0"	0°59'8,3"	0°59'8,3"
Меркурий	3°6'21,4"	0°59'8,3"	4°5'32,4"
Венера	0°36'59,4"	0°59'8,3"	1°36'7,7"
Марс	0°27'41,7"	0°31'26,6"	0°59'8,3"
Юпитер	0°54'9,0"	0°4'58,3"	0°59'8,3"
Сатурн	0°57'7,7"	0°2'0,6"	0°59'8,3"

В этой таблице бросается в глаза тот поразительный факт, что центр эпицикла у нижних планет (Меркурия и Венеры) движется с той же скоростью, что и Солнце вокруг Земли. Для верхних планет – Марса, Юпитера и Сатурна – эти числа различаются, но суммы обоих движений дают ту самую величину движения Солнца. Следовательно, движение Солнца заключается во всех планетных движениях. Конечно, такое явление должно было казаться чрезвычайно странным. Сам собою возникает вопрос, не лежит ли в основе этих одинаковых числовых величин какая-нибудь общая причина?

Нет сомнения, что многие мыслители древности и средневековья ставили такой вопрос. Например, античный астроном Аристарх утверждал центральное положение Солнца в системе мира. Однако первым человеком, который дерзнул строго математически разработать идею о том, что все планеты обращаются вокруг Солнца, был гениальный польский астроном Николай Коперник (1473–1543).

Система мира Коперника

Книга Коперника «Об обращениях небесных сфер» – труд всей его жизни – была опубликована в 1543 году незадолго до смерти ученого. В этом сочинении Коперник разработал идею о движении Земли и положил начало новой астрономии. Созданная им система мира называется гелиоцентрической. В ее основе лежат следующие утверждения:

- 1) в центре мира находится Солнце, а не Земля;
- 2) шарообразная Земля вращается вокруг своей оси, и это вращение объясняет кажущееся суточное движение всех светил;
- 3) Земля, как и все другие планеты, обращается вокруг Солнца, и это обращение объясняет видимое движение Солнца среди звезд;
- 4) все движения представляются в виде комбинации равномерных круговых движений;
- 5) видимые прямые и попятные движения планет объясняются движением Земли.

Кроме того, Коперник считал, что Луна движется вокруг Земли и как спутник вместе с Землей – вокруг Солнца.

Постулат о равномерном движении по окружностям заставил Коперника подобно Птолемею ввести эпициклы и сместить центры окружностей-деферентов относительно центра Солнца. В итоге модель Коперника выглядела не менее сложно, чем модель Птолемея: достаточно сказать, что она содержала 48 кругов вместо 40 кругов в геоцентрической модели. Не отличалась она

и большей точностью. Однако в ней было зерно научной истины, сделавшее ее фундаментом новой астрономии.

По иронии судьбы, подтвердить вывод Коперника о том, что Земля вращается вокруг Солнца, выпало на долю датского ученого Тихо Браге (1546–1601), который имел весьма веские основания не принимать гелиоцентрическую систему. Главный довод Тихо Браге против системы Коперника заключался в следующем: если бы Земля вращалась вокруг Солнца, то и Венера, и Меркурий имели бы фазы, как Луна, чего никто из серьезных астрономов никогда не наблюдал. Доводы Браге звучали убедительно, и хотя предсказываемые фазы, как теперь хорошо известно, действительно существуют, несовершенство оптических инструментов не позволяло их обнаружить. И все же именно точные наблюдения Браге за положением планет в конце концов подтвердили точку зрения Коперника. Данные, полученные Браге, позволили его ученику Иоганну Кеплеру (в итоге восьмилетней работы) объявить, что орбиты планет представляют собой эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце, и что в каждую единицу времени радиус-вектор планеты замечает одинаковую площадь. Так рухнула Пифагорова гармония круговых орбит вокруг богом данного особого положения нашей планеты. Законы Кеплера в свою очередь (в большей степени, чем легендарное падающее яблоко) явились фундаментом, на котором покоится закон всемирного тяготения Ньютона, ставший почти на три столетия основой физики и космологии.

ТВОРЦЫ НОВОЙ АСТРОНОМИИ

Геологическая история показывает нам, что жизнь есть лишь беглый эпизод между двумя вечностями смерти и что в этом эпизоде прошедшая и будущая деятельность сознательной мысли – не более, как мгновение. Мысль – только вспышка света посреди долгой ночи. Но эта вспышка – все.

А.Пуанкаре

На рубеже XVII столетия две личности, обе грандиозной творческой силы и огромного темперамента, вступают на арену борьбы за коперниканское учение – немец Иоганн Кеплер (1571–1630) и итальянец Галилео Галилей (1564–1642). Их работы являются гранью, разделяющей всю историю астрономии: от трактатов Кеплера и Галилея ведет начало все современное научное мирозерцание. Честь создания новой астрономии разделяет с ними датчанин Тихо Браге (1546–1601), «феникс астрономии», как назвал его Кеплер, человек, который впервые за четырнадцать с половиной столетий после Птолемея внес в наблюдательную астрономию существенно новый и весьма обширный материал. Об их судьбах и научном творчестве наш рассказ.

«Я жил не даром!»

Тихо Браге родился в 1546 году. Его отец, датский дворянин, был комендантом Гельсинборга и умер в 1571 году. В 1560 году Тихо по желанию семьи отправился в Копенгагенский университет изучать право. Но юриспруденция, по-видимому, была ему не по душе, и в 1562 году он переселился в Лейпциг, где занимался астрономией. В августе 1563 года он наблюдал противостояние Юпитера и Сатурна. Семья его не сочувствовала таким недворянским затеям и, вероятно, положила бы им конец, если бы на сторону молодого человека не перешел его

Опубликовано в «Кванте» №7,8 за 1992 г.

дядя Стен Билле. Когда Тихо после нескольких лет странствий вернулся в 1571 году на родину, его дядя устроил для него в своем имении маленькую обсерваторию и химическую лабораторию. Наблюдения Тихо над новой звездой, которая появилась в 1572 году, сияла ярче Венеры, а в 1574 году исчезла, обратили общее внимание на молодого астронома. В 1574 году он читал лекции по астрономии в Копенгагене и был представлен датскому королю Фридриху II, который подарил ему остров Хвен в проливе Каттегат и построил для него обсерваторию Ураниенбург, сделавшуюся впоследствии столь знаменитой. В продолжение 21 года (1576–1597) Браге производил наблюдения в Ураниенбурге в кругу многочисленных ассистентов и учеников. Он был последним великим астрономом, жившим до той поры, когда Галилей направил на звездное небо зрительную трубу. Его астрономические приборы, по существу, были известны еще в древности, однако большая изобретательность Браге и развившееся искусство ремесленников позволили сделать их очень точными.

В 1597 году положение Тихо Браге резко изменилось. Его покровитель Фридрих II умер, и, за малолетством его наследника Христиана IV, государством стали править четыре советника. С одним из них, Валькендорпом, Тихо имел столкновение из-за имущества обсерватории, и враги воспользовались этим случаем, чтобы его выжить. Сначала Браге отправился в Копенгаген, когда же Валькендорп запретил ему производить наблюдения своими прежними инструментами, он переселился в Росток. В 1599 году окончились его переговоры с императором Рудольфом II, и он отправился в Прагу в качестве императорского астронома, астролога и алхимика. Он получил замок Бенах близ города для научных занятий и – что всего важнее – ассистента в лице молодого астронома Кеплера. Браге не удалось, однако, долго поработать на новом поприще: он внезапно заболел и скоропостижно скончался 23 октября 1601 года.

Браге был непревзойденным наблюдателем – даже с нашей современной точки зрения его наблюдения являются очень точными и тщательно выполненными. Однако, иронией судьбы, весь этот нечеловеческий труд длиною в жизнь был проделан им для того, чтобы опровергнуть теорию Коперника. Против теории движения Земли Браге приводит следующие возражения. 1) Непонятно, каким образом при вращении Земли камень, брошенный с высокой башни, может упасть у ее подножья, – возражение весьма веское в то время, когда закон инерции был еще неизвестен. Коперник пытался опровергнуть подобные доводы допущен-

нием, что всем земным телам присуще совместно с Землей круговое движение. 2) Если Земля пробегает такое огромное расстояние по своей орбите, то неподвижные звезды должны изменять свое кажущееся положение. Коперник, предвидя это возражение, заранее опроверг его указанием на громадность расстояния до неподвижных звезд. 3) Нельзя указать силу, которая поддерживала бы параллельность земной оси, — довод весьма веский и получивший правильное объяснение только в конце семнадцатого столетия Ньютоном. 4) Библия в книге Иисуса Навина («Солнце, остановись в Гидеоне!») прямо опровергает учение о движении Земли. Последний аргумент, по видимому, окончательно убедил Браге в несостоятельности системы Коперника. Он придумал промежуточную систему, согласно которой, как и у Птолемея, Земля находится в покое, а Солнце и Луна вращаются вокруг нее; прочие же планеты двигаются вокруг Солнца, как у Коперника.

Сейчас система мира Тихо Браге кажется довольно наивной, но в свое время она сделала полезное дело. Так или иначе, но Браге ниспроверг систему Птолемея и тем самым подготовил окончательную и решительную победу Коперника. И конечно же, главным вкладом, определившим эту победу, были уникальные наблюдения Тихо Браге. Ему не пришлось вкусить теоретических плодов своей долголетней работы. Впоследствии мы увидим, как плохооплачиваемый и многострадальный его ассистент Кеплер выведет из его данных истинные орбиты планет и исправит, таким образом, систему Коперника в одном из ее самых слабых мест.

Научный подвиг Тихо Браге оказался не напрасным — из его наблюдений выросли основы нового миропонимания, оправдав гордое восклицание умиравшего Браге: «Я жил не даром!»

Гармония мира

Через двадцать восемь лет после выхода в свет знаменитой книги Коперника «Об обращении небесных сфер» 27 декабря 1571 года в городке Вейль-дер-Штадт в Вюртемберге увидело свет слабое дитя, которому было суждено завершить дело Коперника и разгадать законы неба. Это был Иоганн Кеплер, сын трактирщика, одного из тех отчаянных людей, которых было так много в то время. Отец Кеплера после рождения сына отправился искать военного счастья у герцога Альбы в Бельгии. Потеряв в военных походах все свое немудреное состояние, он вернулся в Германию и поселился с семьей в городке Леонберге. Здесь юный Иоганн шести лет от роду поступил в местную

школу. Он должен был научиться лишь тому, что необходимо было знать швабскому крестьянину. Однако судьба предназначила этому слабому ребенку более высокое жизненное поприще. Благодаря своему прилежанию, мальчик поступил в 1586 году в протестантскую монастырскую школу в Маульбронне, где его ожидали всяческие неприятности и лишения. Здесь-то он и заложил основу своим обширным познаниям древних классиков и латинского языка.

Уже в это время Кеплер обнаружил интерес к наблюдениям над небесными телами. Он отметил в своем дневнике тот замечательный факт, что при наступившем 3 марта 1588 года лунном затмении совершенно не было видно покрытого земной тенью диска Луны. Сдав блестяще экзамен на бакалавра, Кеплер получил осенью 1589 года место в Тюбингенской духовной академии, которая была известна своей богословской ученостью и нетерпимостью. Оба первых года ушли у него здесь на изучение естественных наук. Учителем математики и астрономии у Иоганна был знаменитый в свое время профессор Местлин. Он-то впервые и посвятил молодого Кеплера в учение Коперника. Но делалось это тайком, так как Местлин опасался гнева фанатиков и публично излагал лишь птолемееву систему мира. Последние три года занятий в Тюбингене были посвящены богословию.

После окончания академии Кеплер получил место учителя математики и морали в гимназии австрийского города Граца. Во многих отношениях это было не очень удачное место, но Кеплер получил образование за казенный счет и поэтому полагал, что должен повиноваться сделанному ему указанию. 13 марта 1594 года он отправился в Грац.

Помимо собственных специальных занятий, Кеплеру было поручено также составить календарь для Штирии и снабдить его астрологическими предсказаниями на новый год. При этих предсказаниях Кеплер больше полагался на свой здравый взгляд на вещи, нежели на расположение светил, и в нескольких случаях довольно точно предугадал будущие события. Таким образом, реформатор астрономии начал свой жизненный путь, окруженный ореолом великого астролога. Сам он, конечно, прекрасно знал цену своим предсказаниям и как-то в личной переписке заметил, что все такого рода занятия «являются очень сомнительными и мало полезными в житейских делах».

В один из зимних дней 1595 года, пока он набрасывал на доске перед своими учениками чертеж, ему вдруг пришла в голову мысль, определившая всю его дальнейшую жизнь. Кеплер начер-

тил равносторонний треугольник с вписанной и описанной окружностями (рис.1) и неожиданно осознал, что эти окружности можно связать с орбитами планет. Довольно быстро он понял, что плоские геометрические фигуры не позволяют найти разумный ответ, и обратился к геометрическим телам – правильным многогранникам.

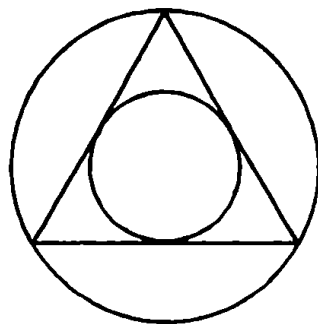


Рис.1

В математике известно пять правильных многогранников (рис.2): тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. С другой стороны, Кеплер знал вычисленные Коперником расстояния от Солнца до шести известных в то время планет.

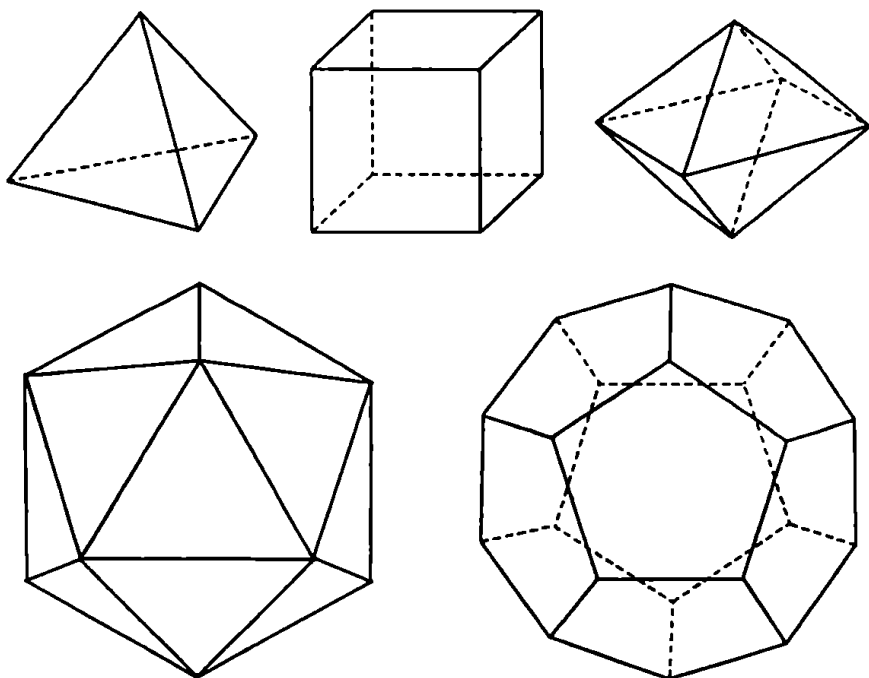


Рис.2

Кеплер предположил, что поскольку в мире должна существовать полная математическая гармония, пять планетных сфер должны располагаться вокруг Солнца таким образом, чтобы между ними вписывались правильные многогранники. Прделанная Кеплером вычислительная работа была под силу только незаурядному математику. Между самыми далекими сферами Сатурна и Юпитера он поместил куб так, чтобы вершинами он

касался сферы Сатурна, а гранями — сферы Юпитера. Между Юпитером и Марсом Кеплер поместил тетраэдр и т.д. с тем же расчетом, чтобы гранями каждый многогранник касался внутренней, меньшей сферы, а вершинами был вписан во внешнюю, большую сферу.

Результаты своих вычислений Кеплер опубликовал в 1596 году в книге под названием «*Mysterium cosmographicum*» («Тайна Вселенной»). Кеплер не сомневался, что тайна Вселенной раскрыта: ведь он не только объяснил основу устройства Солнечной системы, но и открыл, почему планет именно шесть, а не «двадцать или сто». К сожалению, склонный к умозрительным построениям ученый попал на совершенно ложный путь. Сегодня мы можем с уверенностью утверждать, что расстояния между планетами и их число никак не связаны ни с какими многогранниками. Конечно, структура Солнечной системы не является случайной, но истинные причины, по которым она устроена так, а не иначе, до сих пор не известны.

В 1598 году эрцгерцог Фердинанд издал указ, которым из Штирии выселялись все протестантские учителя и священники. Только для Кеплера в указе было сделано исключение. Этим проявлением милости он был обязан тому, что воздерживался от религиозных споров, а также тому, что Фердинанд высоко ценил его научные сочинения. Но Кеплер плохо чувствовал себя в Граце, где гимназия совершенно опустела. Охотнее всего он вернулся бы к себе на родину, но богословы из

Тюбингенской духовной академии и слышать о нем не хотели. Это оказалось счастьем для молодого астронома, поскольку Кеплер решил принять предложение Тихо Браге и стать его сотрудником в Праге. В виде особой милости ему было позволено сдать в аренду свое недвижимое имущество в Граце. В октябре 1600 года семья Кеплера переселилась в Прагу, где Кеплер должен был работать под руководством Тихо Браге в качестве его помощника.

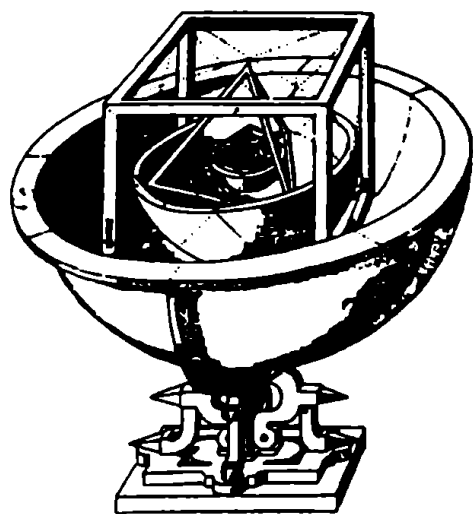


Рисунок из первой книги Кеплера
«Космографическая тайна»

Очень быстро отношения между Кеплером и Тихо Браге стали чрезвычайно натянутыми. Тихо Браге занимался усовершенствованием системы Коперника, в которой он находил много недостатков, Кеплер же был ее решительным сторонником. Научные споры переходили порой в жестокие оскорбления со стороны патрона. Кроме того, несмотря на то, что Тихо Браге обладал княжескими богатствами, Кеплеру стоило больших трудов получать от него свое жалованье. Сам Кеплер вспоминал, что ему приходилось почти вымаливать себе содержание. Трения эти прекратились лишь после неожиданной смерти Тихо, последовавшей 23 октября 1601 года. Тихо Браге оставил Кеплеру сундук с бесценными результатами своих наблюдений и завещал опровергнуть учение Коперника.

После смерти Браге Кеплер получил место и звание императорского математика. Однако император Рудольф испытывал очень большие денежные затруднения, поэтому положение Кеплера в Праге было очень тяжелым. Восемь лет он не получал ни гроша за свою работу и жил в вопиющей бедности, перебиваясь случайными заработками и составлением гороскопов. И все эти годы он напряженно занимался анализом наблюдений Тихо Браге над Марсом. По словам Кеплера, размышляя и соображая, он чуть ли не сошел с ума. Но он нашел то, что искал.

В 1609 году вышла в свет «Новая астрономия, причинно обоснованная, или Физика неба, изложенная в исследованиях движения звезды Марс по наблюдениям благороднейшего мужа Тихо Браге». В этой гениальной книге Кеплер впервые сформулировал те положения, которые мы называем теперь первым и вторым законами Кеплера.

Первый закон. *Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

Второй закон. *Планеты движутся по своим орбитам с переменной скоростью таким образом, что площади, описываемые радиусом-вектором от центра Солнца до планеты за равные промежутки времени, оказываются равными (рис. 3).*

Первоначально «Новая астрономия» не обратила на себя такого внимания, какое выпало на ее долю впоследствии. Материальное положение Кеплера не улучшалось. По-

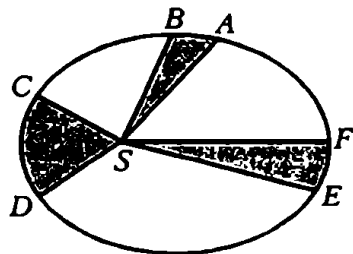


Рис. 3. Ко второму закону Кеплера

этому в 1612 году он поселился в Линце в качестве директора местной гимназии. Здесь он снова занялся исследованием строения планетной системы. Несколько лет бесконечных вычислений, сотни неудачных выкладок не останавливали Кеплера. 8 марта 1618 года ему пришла в голову мысль сравнить числа, выражающие квадраты времен обращения планет, с числами, равными кубам их средних расстояний. Однако Кеплер ошибся в вычислениях и не нашел никакого совпадения. Лишь 15 мая того же самого года он нашел допущенную им раньше ошибку и получил искомое соотношение. Кеплер писал по этому поводу: «Это соотношение представляло такое блистательное завершение моей семнадцатилетней работы над наблюдениями Тихо, что сперва я подумал, уж не грежу ли я, принимая искомое за данное». Так был найден третий закон Кеплера.

Третий закон. *Квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.*

Этот результат был опубликован Кеплером в 1619 году в «Гармонии мира», пожалуй самом его значительном сочинении. В нем больше, чем в других его сочинениях, нашла отражение его непоколебимая вера в то, что мир отлит в математической изложнице. Он искал гармонии планетных движений с геометрическими фигурами, с теорией чисел, с музыкой сфер. Многие из того, что вдохновляло его, оказалось ложным. Но последующие поколения нашли у Кеплера то, что послужило фундаментом новой астрономии.

А частная жизнь складывалась трагично. Его жена и сын умерли во время эпидемии оспы. Кеплер женился во второй раз, но вынужден был скитаться по Германии, охваченной Тридцатилетней войной. В конце концов Кеплер нанимается на службу к известному полководцу той эпохи, герцогу Валленштейну, в качестве астролога. Нужда вновь заставляет его обратиться к императору с просьбой выплатить ему жалованье за годы императорской службы. Кеплер решает лично поехать к императору в Регенсбург. В дороге в осеннее ненастье он простудился и заболел. 15 ноября 1630 года он умер в бедной гостинице на старом рыбном рынке Регенсбурга, без помощи, вдали от семьи, на 59-м году жизни. При нем нашли 57 экземпляров изданного им календаря на 1631 год, 16 экземпляров его астрономических таблиц и 7 пфеннигов.

Нельзя не сожалеть о том, что жизнь Кеплера протекала в такое печальное время. Лишь только после своей смерти он занял подобающее ему место в науке, увлекая своим примером будущих исследователей.

Время возникновения новой астрономии – рубеж шестнадцатого и семнадцатого веков – было и временем возрождения античности. «Мы – истинные древние!» – восклицал Фрэнсис Бэкон. В этом плане творчество Кеплера, его подход к изучению Вселенной близко примыкает к античности. Для него мироздание было по сути своей математично, он считал, что, изучая геометрию, мы изучаем мироздание. Это скорее античное, чем современное восприятие мира. Кеплер почти не нуждался в экспериментальных фактах – чертеж мира находился внутри него. Повидимому, первым человеком, который попытался узнать, что говорит природа, а не человеческое воображение, был Галилео Галилей.

Галилео родился в итальянском городе Пиза в 1564 году в семье бедного флорентийского дворянина. В детстве получил хорошее домашнее образование, учился в Пизанском университете, но не окончил его за отсутствием средств. Тем не менее он быстро обнаружил свой талант создателя остроумных физических приборов, смелого экспериментатора. Некоторое время он преподавал в Пизе, потом перебрался в Падую. Увлеченно занимался опытами по механике, конструировал новые машины и механизмы, применял свои силы в инженерном деле и фортификации. Преподавая астрономию, Галилей познакомился с учением Коперника, но астрономия как таковая долго не входила в круг его интересов. Так продолжалось до 1609 года, когда в его жизнь вошла зрительная труба.

Кем и когда она была изобретена, доподлинно неизвестно. Во всяком случае, уже спустя пятьдесят лет после ее первого появления, никто не мог указать точных обстоятельств, при которых возник этот чудесный инструмент. Однако остается фактом, что в 1608 году шлифовальщик оптических стекол, родом из Невеля, по имени Ганс Липперсгей, живший в Миддельбурге, представил Генеральным штатам Голландии инструмент – «чтобы далеко видеть». В то же время он просил о привилегии на тридцать лет или о выдаче ежегодной пенсии. Вследствие этой просьбы Генеральные штаты собрали 2 октября названного года особую комиссию, которой и поручили испытать предложенный инструмент. Комиссия дала благосклонный отзыв, и представленный Липперсгеем инструмент, а также три других аналогичных инструмента были куплены у него за необычайно высокую сумму в 900 гульденов. Но в привилегии ему было отказано, так как по мнению комиссии другим лицам было уже известно об этом изобретении.

Без сомнения, это не было простой отговоркой, так как вскоре поступило новое ходатайство Якоба Меция, жившего в Алькмааре. Представляя свою зрительную трубу, Меций сообщал, что это результат двухлетнего труда и размышлений. Он не сомневается, что настоящий инструмент можно еще значительно усовершенствовать, и просит о привилегии, чтобы никто не имел права в течение 22 лет, под страхом конфискации и штрафа в 100 гульденов, продавать такой инструмент. А кроме того, он (Меций) просит наградить его приличной суммой денег. Согласно решению Генеральных штатов, 17 октября 1608 года Мецию было поручено улучшить свой инструмент. Но в привилегии ему было также отказано.

Таковы исторически несомненные факты относительно первого появления зрительной трубы. Таким образом, ясно, что мы совершенно не знаем, кто был ее первым изобретателем.

Предание гласит, что дети Липперсгея как-то играли стеклами от очков. Случайно они расположили их одно за другим так, как расположены стекла в наших нынешних театральных биноклях. Когда они стали глядеть в них, то соседнюю церковь они увидели в увеличенном виде и так, словно она придвинулась к ним. Они сказали об этом своему отцу, который пришел, таким образом, к мысли об устройстве зрительной трубы. По другому преданию, к Липперсгею пришел иностранец и заказал ему отшлифовать два круглых стекла, одно выпуклое, а другое вогнутое. Потом он явился за стеклами. Получив стекла, он расположил их на некотором расстоянии друг от друга и унес с собой. Липперсгея это навело на мысль повторить то же с другими стеклами. К своему удивлению, он увидел отдаленные предметы совсем близко от себя.

Насколько верны эти рассказы – теперь уже невозможно установить. Во всяком случае, нужно допустить, что уже до 1608 года, или самое позднее, в первой его половине, кто-то изобрел простую зрительную трубу. А когда Липперсгей подал свое прошение, то это изобретение было уже достаточно известно. Но как бы там ни было, одно несомненно: вновь изобретенный инструмент быстро получил распространение за пределами Голландии, во Франции и Италии. Ибо уже в следующем году какой-то голландец доставил такой инструмент в Венецию, где он возбудил сильный интерес.

В Венеции как раз находился тогда Галилей. Видал ли он сам голландский инструмент – неизвестно. Но дошедшая до него техническая новость побудила его заняться изучением нового изобретения. Галилей сумел соорудить себе сначала трубу с

трехкратным увеличением, а потом в короткий срок довел увеличение своих инструментов до тридцатикратного. Его величайшей заслугой является то, что он первым широко использовал зрительную трубу для астрономических целей.

Мы не знаем, случайно ли Галилей обратил свою зрительную трубу к небесам, или он предполагал увидеть небесные тела так, как их не видел еще никто, но описания первых ночей, которые он провел у телескопа, сложились в одну из самых волнующих научных книг, когда-либо появлявшихся за всю историю человечества. Это был «Звездный вестник», опубликованный в 1610 году. Все ее страницы дышат страстной увлеченностью, и легко вообразить, в каком состоянии жил Галилей в первые месяцы его работы с телескопом. Почти сразу он открыл лунные кратеры, медленно ползущие по солнечному диску пятна, фазы Венеры и – самое главное – четыре спутника, которые обращались вокруг Юпитера, словно воспроизводя в миниатюре коперниковскую модель Солнечной системы. Он получил неопровержимое доказательство истинности гелиоцентрической системы: Земля не была неподвижна.

Галилей назвал спутники Юпитера в честь тосканского герцога Козимо II Медичи «Медичейскими звездами». Название это очень понравилось тосканскому владыке, который поспешил обласкать Галилея, и тот впервые добился сносных условий для продолжения научной работы, избавившись от необходимости преподавать.

Телескоп Галилея разделил облака Млечного Пути на звезды, чем завершил многовековые словопрения философов о его природе. Млечный Путь оказался на деле массой звезд, собранных в скопления. Противопоставления Земли и неба больше не существовало: все звезды – это далекие Солнца, все планеты подобны Земле.

Один-единственный человек из современных Галилею ученых мог по достоинству оценить открытия своего итальянского коллеги – Иоганн Кеплер. Кеплера больше всего поразило то, что Галилей открыл в пределах Солнечной системы четыре новые планеты. Слух об этом дошел до Кеплера через его друга Иоганна Вакхера за несколько недель до того, как в Праге появился экземпляр «Звездного вестника». Кеплер писал: «Вакхер поведал мне об этом из окна кареты, остановившись перед моим домом. Великое удивление охватило меня, когда я обдумал эту странную новость... Когда я расстался с Вакхером, я начал размышлять о том, может ли увеличиться число планет, не повредив моей «Тайне Вселенной», которую я выпустил в свет

тринадцать лет назад. В этой книге пять геометрических тел Евклида допускают лишь шесть планет вокруг Солнца и не более».

Кеплеровскому толкованию строения Солнечной системы, казалось, был нанесен смертельный удар, так как для добавочных планет уже не оставалось геометрических тел Евклида. Вакхер предположил, что новые планеты, возможно, находятся возле какой-нибудь звезды, вокруг которой они и обращаются, доказывая тем самым множественность миров. Когда книга была наконец получена, Кеплер воспрял духом, узнав, что четыре новых небесных тела оказались лунами Юпитера и не опровергают его «Тайны Вселенной». В то же время он был избавлен от необходимости признать множественность миров – идею, которую до конца жизни Кеплер называл «мерзкой философией».

1610 год был годом беспримерных успехов для Галилея. Затем наступили годы разочарований. По поводу открытия солнечных пятен возник вскоре горячий спор, из которого Галилей не вышел безусловным победителем. Фрисландский астроном Фабриций во всяком случае опередил его в публикации открытия, а иезуитский патер Шейнер, в свою очередь настаивавший на правах первенства, сделался его заядлым врагом. В сочинении, вышедшем в 1614 году, некий Симон Мариус утверждал (по всем признакам, совершенно неосновательно), что уже летом 1609 года он наблюдал спутники Юпитера, из чего следовало, что он начал использовать зрительную трубу для исследования небесных явлений раньше Галилея. Такого рода неприятности не могли, однако, поколебать спокойствия его духа. Гораздо хуже было то, что его противники, видя свое бессилие на научном поле битвы, принялись настраивать против него духовные власти.

В 1616 году отцы церкви делают Галилею устное внушение о недопустимости поддержки учения Коперника. Галилей переехал во Флоренцию и жил здесь спокойно до 1623 года, успешно занимаясь механикой и храня молчание относительно движения Земли.

В 1623 году на папский престол восходит под именем Урбана VIII кардинал Маффео Барберини, друг Галилея, который за три года до того восхвалял Галилея в латинских стихах. Узнав о восшествии на престол своего доброжелателя, обрадованный Галилей поспешил в Рим, и действительно был принят максимально любезно. После такого приема Галилей ободрился и счел возможным приняться за окончание своего давно задуманного сочинения о системах Вселенной. В течение 1628–1630 годов он

был дважды в Риме и уже при первой поездке отдал свой труд на суд духовных цензоров. В 1630 году он получил разрешение печатать его. Это сочинение – «Диалог о двух важнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой» – вышло в свет во Флоренции в 1632 году. В нем проводится сравнение между Вселенными Птолемея и Коперника в форме диалога, продолжающегося четыре дня. В беседе участвуют, с одной стороны, сторонники коперниковой системы Сагрето и Сальвиати, а с другой – философ Симплиций, защитник птолемеевой системы. Первый день посвящен общим вопросам движения тел и опровержению аристотелевой механики. Предметом беседы второго дня служит вращение Земли вокруг оси, причем старое воззрение опровергается частью доводами Коперника, частью же новыми, собственными. Движение Земли вокруг Солнца составляет предмет рассуждений третьего дня. Галилей защищает это движение доводами Коперника и, кроме того, разрабатывает теорию, в силу которой земная ось неизменно сохраняет параллельное себе положение. Это – знаменитый закон инерции Галилея. Беседа четвертого дня посвящена объяснению приливов и отливов в связи с движением Земли; это, впрочем, слабейшая из всех теорий Галилея.

Галилей полагал, что поступает предусмотрительно, указав в своем предисловии, что данное сочинение вполне согласно с намерениями церковных владык и даже полезно для их целей. Тем не менее скоро разразилась жестокая буря против новой защиты Коперника. Папа Урбан VIII, настроенный недругами, уже видит в Галилее своего личного врага. Галилея вызвали на суд. 21 июня 1633 года он прибыл в Рим, оставался день и ночь в инквизиционном помещении, а на другой день был переведен в доминиканский монастырь Алла Минерва, где его заставили на коленях отречься от всех своих заблуждений. Что происходило в ночь с 22 на 23 июня в здании инквизиции с 69-летним больным стариком, вероятно, навсегда останется тайной. Нет никакого сомнения, что ему грозили пыткой, но пытали ли его на самом деле – это спорный вопрос, которым историки нашего века много занимались, но окончательно его так и не разрешили. Галилей был приговорен не только к отречению от своих заблуждений, но и к тюремному заключению. Последнее было, однако, тотчас же заменено домашним арестом на вилле Монте-Ривальто в церковном приходе Арчетри. Здесь Галилей умер 8 января 1642 года от изнурительной лихорадки. Даже смерть не примирила с ним церковь; на его могиле не было произнесено надгробной речи, его тело не позволили поместить в семейном склепе Галилеев, на его

могиле не разрешили установить ни памятника, ни надгробия. Лишь через сто лет прах Галилея был с почестями погребен в достойной его памяти усыпальнице собора Санта-Кроче во Флоренции, рядом с могилой Микеланджело.

Научное творчество Кеплера и Галилея очень легко охарактеризовать – они создали новую астрономию. В историю культуры, в историю смены мировоззрений они входят совместно и нераздельно; они в равной мере подготовили то окончательное слияние механики и астрономии, которое было сделано Ньютоном, утверждавшим, что он «стоял на плечах гигантов».

ХРИСТИАН ГЮЙГЕНС

В июне 1995 года исполнилось 300 лет со дня смерти гениального голландского математика, физика и астронома Христиана Гюйгенса. Многие из его научных открытий не потеряли своего значения до настоящего времени.

Христиан Гюйгенс (Хейгенс – по голландскому произношению) родился в Гааге 14 апреля 1629 года. Отец его, Константин Гюйгенс, был очень образованным человеком, выдающимся поэтом своего времени и влиятельным государственным деятелем. Некоторое время он занимал должность председателя Государственного совета Соединенных Провинций Нидерландов, как тогда называли Голландию.

Своему отцу Гюйгенс обязан первыми сведениями в области точных наук. Уже с ранних лет Христиан проявил исключительные способности к математике. В тринадцать лет он уже знал многое из тогдашней механики и увлекся конструированием различных механизмов. Пятнадцати лет он приступил в серьезному изучению математики под руководством бельгийского ученого Стампиуса.

Шестнадцати лет Христиан поступил в Лейденский университет, где по желанию отца изучал юридические науки. Кроме того, он не прекращал и занятий по математике, которыми руководил один из крупнейших голландских математиков того времени профессор ван Схоутен. В 1651 году в возрасте 22 лет Гюйгенс смог написать свой первый трактат по математике – «О квадратуре гиперболы, эллипса и круга» (т.е. о вычислении площадей этих фигур), поставивший его в ряд лучших математиков своего времени.

Окончив Лейденский университет, Гюйгенс уехал вместе с братом во Францию и поступил в Анжерский протестантский университет, где в 1655 году защитил диссертацию на степень доктора прав. Возвратившись затем в Голландию, он не стал заниматься юриспруденцией, а увлекся шлифовкой оптических

стекло для астрономических труб. Главным его интересом стала астрономия, которая в то время делала крупные успехи благодаря применению для наблюдений телескопов.

С помощью изобретенной им машины для шлифовки стекол Гюйгенсу удалось построить телескопы со значительным увеличением. Один из объективов его телескопа хранится сейчас в физическом кабинете в Утрехте. На краю его рукой Гюйгенса при помощи алмаза написано: «Приближать к глазам нашим отдаленные светила. 3 февраля 1665 г.» Стекло это окрашено в синевато-зеленый цвет и имеет в своей массе много мелких пузырьков воздуха. В это время даже в Голландии еще не умели изготавливать достаточно прозрачные стекла.

Телескопы Гюйгенса превосходили по качеству все тогда существовавшие. Используя эти уникальные приборы, Гюйгенс весной 1655 года открыл спутник Сатурна. В своем мемуаре «О луне Сатурна», опубликованном в 1656 году, он пишет:

«Двадцать пятого марта 1655 г., наблюдая Сатурн в диоптрическую трубу в 12 футов (3,6 м), я заметил по сю сторону кольца Сатурна на западе и на расстоянии трех скрупулов (минут) звездочку, лежащую в плоскости кольца Сатурна. У меня явилась мысль, что эта звездочка легко может оказаться небесным светилом вроде четырех лун Юпитера, и я отметил взаимное положение ее и Сатурна. Я не ошибся: на другой день звездочка передвинулась, а наблюдения последующих дней дали возможность определить ее положение в каждый момент.»

Так был открыт первый из спутников Сатурна, позже названный Титаном.

Кроме того, в системе Сатурна Гюйгенс открыл его «кольцо». Планету Сатурн изучали и Галилей, и немецкий астроном Гевелий (в продолжение 15 лет). Галилей пришел к заключению, что эта планета состоит из трех тел. Гевелий считал, что Сатурн – круглая планета, охваченная двумя лунами. И только Гюйгенс установил, что Сатурн окружен плоским кольцом, которое свободно висит над экватором. Свое открытие он опубликовал в 1656 г. в виде анаграммы (так называют перестановку букв, посредством которых можно составить фразу):

aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiii, llll, mm, nnnnnnnnn, oooo, pp, q, r, s, ttttt, uuuuu.

К анаграммам прибегали, чтобы скрыть существо открытия, сохраняя его приоритет. Из этих букв можно составить фразу:

«Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato».

В переводе на русский язык это значит: «Он (т.е. Сатурн) окружен кольцом, тонким, плоским, нигде к нему не прикасающимся, наклоненным к эклиптике». Расшифровку этой анаграммы Гюйгенс опубликовал в трактате «Система Сатурна» в 1659 г.

Наряду с астрономией Гюйгенс продолжает интересоваться чистой математикой. В 1655 году вышло в свет его большое исследование «О величине круга», представляющее собой первый после Архимеда новый подход к вычислению числа π . Гюйгенс нашел число π с 14 значащими цифрами, замечая при этом, что если бы он вместо своего метода пользовался методом Архимеда, то ему пришлось бы вычислить правильный многоугольник с 20 000 сторон.

В 1656 году появился мемуар Гюйгенса «О расчетах при игре в кости», положивший начало научному построению теории вероятностей.

В 1656–1657 гг. Гюйгенс, по выражению его биографа Гравезанда, первым из смертных точно измерил время. Им были построены первые маятниковые часы, на которые он взял в Голландии патент. Гюйгенс сразу же приспособил часы к морскому делу – к определению долготы на море.

Справедливости ради стоит отметить, что в этом изобретении у Гюйгенса был великий предшественник – Галилео Галилей. В 1641 году он начал конструктивную разработку маятниковых часов, идея которых относится, по-видимому, еще к 1636 году. Об этом эпизоде жизни Галилея рассказывает его ученик и близкий друг Вивiani.

20 августа 1659 года в письме к герцогу Леопольду Тосканскому он сообщил подробности, связанные с изобретением Галилея. «В один из дней 1641 года, когда я находился на вилле Арчетри, – писал Вивiani, – Галилей поделился со мной своими мыслями о возможности присоединить маятник к часам, приводимый в движение грузом или пружиной, и что маятник, как точный регулятор хода часов, может корректировать до известной степени действие на ход несовершенств механической конструкции. Но, будучи лишен зрения и уже слаб для того, чтобы выполнить план, созревший в его голове, Галилей ознакомил со своими мыслями сына Винченцо в один из его приездов в Арчетри из Флоренции. Решено было сразу приступить к делу, но через несколько месяцев Галилей заболел и 8 января 1642 года умер. После этого события у Винченцо пропал энтузиазм к выполнению модели часов, и только в апреле 1649 года он стал работать над ее созданием согласно концепции своего отца, сообщенной

ему в моем присутствии... Винченцо Галилей нанял молодого слесаря, который имел некоторый опыт в создании больших стенных часов. Он заставил его сделать железную раму, колеса и их оси и оборотные колеса, но без нарезания зубцов. Всю остальную работу по изготовлению часов Винченцо выполнил собственными руками».

Винченцо ненадолго пережил отца: он скончался 16 мая 1649 года от острого припадка нервно-психического заболевания. В бреду он уничтожил большое количество часов, или, по словам Вивиани, «остановил их ход навечно»; по-видимому, пострадала и модель маятниковых часов, созданная его руками. Все, что осталось от трудов Винченцо и что пережило Галилеев – отца и сына, – это чертежи конструкции их маятниковых часов.

Изобретение Галилеем маятниковых часов держалось в строгой тайне, о нем даже не сообщалось в биографии Галилея, написанной Вивиани. Последний счел возможным сообщить о часах лишь после того, как стало известно об изобретении маятниковых часов Гюйгенсом. Сам Гюйгенс узнал о маятниковых часах Галилея лишь в 1660 году. Устройство их, более сложное, чем его собственное, Гюйгенс находил замечательным и воздавал должное таланту Галилея.

В 1660 году Гюйгенс сделал важное открытие в области механики, впервые дав правильную формулировку закона упругого удара тела. Благодаря изобретению маятниковых часов и, главным образом, открытиям по астрономии имя Христиана Гюйгенса становится известным во всей Европе. В 1663 году Гюйгенс избирается членом Королевского общества в Лондоне. Вскоре после этого произошло важное событие в жизни Гюйгенса. Министр Людовика XIV Жан-Батист Кольбер пригласил Гюйгенса в Париж, в только что основанную Королевскую академию наук. В Париже Гюйгенс пробыл 15 лет с 1666 года до 1681 года и выполнил за это время много прекрасных работ. К парижскому периоду относится выход в свет его исследования под названием «Маятниковые часы» (1673 г.) – одной из замечательнейших книг по механике, предшествовавшей появлению «Математических начал» Ньютона. К парижскому периоду относится также написание Гюйгенсом «Трактата о свете» и «Рассуждений о причине тяготения», хотя обе эти работы появились в печати лишь в 1690 году.

В «Маятниковых часах» гений Гюйгенса проявился особенно ярко. Содержание мемуара гораздо шире его названия. В книге содержится много различных открытий и изобретений в разнообразных областях математики, физики и механики. Чтобы

оценить обилие этих открытий, достаточно перечислить лишь главнейшие из них. Это изобретение обыкновенных маятниковых часов, изобретение часов с коническим маятником, открытие свойств циклоидального маятника, обладающего независимым от амплитуды периодом, создание учения об эволютах и эвольвентах, представляющего важную главу в современной дифференциальной геометрии.

Все эти многочисленные открытия носят, однако, только подготовительный характер к содержанию центральной части мемуара, посвященной теории физического маятника.

Наиболее интересен основной принцип, который Гюйгенс положил в основу своей теории. По существу, это первая достаточно общая формулировка закона сохранения энергии в механике. Вот как сам Гюйгенс формулирует этот принцип:

«Если любое число весомых тел приходит в движение благодаря их тяжести, то общий центр тяжести этих тел не может подняться выше, чем он был в начале движения».

Комментируя указанный принцип, Гюйгенс подчеркивает его эвристическое значение и замечает, что с помощью этой гипотезы можно доказать много теорем механики. «И если бы, — пишет он, — изобретатели новых машин, напрасно пытающиеся построить вечный двигатель, пользовались этой моей гипотезой, то они легко бы сами осознали свою ошибку и поняли, что такой двигатель нельзя построить механическими средствами».

Книга Гюйгенса «Маятниковые часы» очень быстро обрела известность и заслужила всеобщее признание. Ньютон, познакомившись с книгой, назвал ее превосходной, так как он нашел в ней много тонких и полезных рассуждений, вполне достойных ее автора. Столь же хвалебны были и отзывы других выдающихся современников Гюйгенса.

К парижскому периоду относится и создание Гюйгенсом теории оптических явлений. Основные результаты своих исследований Гюйгенс впервые изложил перед членами Парижской Академии наук еще в 1678 году. В 1690 году он выпустил свой знаменитый «Трактат о свете», где подробно развил волновую теорию оптических явлений. Подобно Декарту и Гуку Гюйгенс рассматривал свет как движение особой среды — эфира.

«Не может быть сомнения, — пишет Гюйгенс, — что свет состоит из движения какой-то материи. Если рассматривать действия, им производимые, то можно заметить, что когда свет собран вместе, с помощью, например, зеркал, он обладает свойством сжигать, как огонь, т.е. он разъединяет отдельные части тел; последнее служит убедительным признаком движения».

«Свет заключается, – продолжает Гюйгенс, – в движении вещества, которое находится между нами и светящимся телом... Если принять во внимание чрезвычайную быстроту, с которой распространяется свет во все стороны, а также и то, что когда он приходит из различных и даже противоположных мест, лучи его проходят один через другой, не мешая друг другу, то станет совершенно понятно, что когда мы видим светящийся предмет, это не может происходить вследствие переноса материи, которая доходит до нас от этого предмета наподобие пули или стрелы, пересекающих воздух. Это слишком противоречит указанным двум свойствам света, в особенности второму. Значит, свет распространяется другим образом. Привести нас к пониманию способа распространения света может то, что нам известно о распространении звука в воздухе».

Рассматривая звуковые явления как физический образ, помогающий уяснить себе процесс распространения света, Гюйгенс указывает и различие между звуком и светом. «Но если в отношении движения свет и звук сходны, – пишет он, – то во многих других отношениях они различны... В самом деле, известно, что возбуждение звука производится внезапным сотрясением всего тела или значительной его части, что возмущает весь смежный с ним воздух. Но движение света должно зарождаться от каждой точки светящегося тела».

Механизм движения света Гюйгенс представляет следующим образом. Свет распространяется в тонкой среде – эфире, которая заполняет все мировое пространство и поры тел. Этот эфир состоит из мельчайших упругих шариков. Распространение света – процесс распространения малых движений от шарика к шарiku – подобно распространяющемуся импульсу вдоль стальных шаров, соприкасающихся друг с другом и вытянутых в одну линию. Объясняя механизм распространения импульса в эфире, Гюйгенс выдвинул принцип, носящий его имя. Он формулирует его так: «По поводу процесса образования этих волн следует еще отметить, что каждая частица вещества, в котором распространяется волна, должна сообщать свое движение не только ближайшей частице, лежащей на проведенной от светящейся точки прямой, но необходимо сообщает его также и всем другим частицам, которые касаются ее и препятствуют ее движению. Таким образом вокруг каждой частицы должна образовываться волна, центром которой она является».

Применение этого принципа дало возможность Гюйгенсу объяснить с точки зрения волновой теории прямолинейное распространение света, законы отражения и преломления.

Парижский период жизни Гюйгенса окончился в 1681 году. В связи с начавшимся во Франции гонением на протестантов он в знак протеста покидает Париж, несмотря на то, что король Людовик XIV уговаривал его остаться.

В то время из Франции уехали многие выдающиеся ученые. Кроме Гюйгенса, Парижскую академию оставили также знаменитый физик Папен и астроном Рёмер.

Остальную часть своей жизни Гюйгенс провел на родине, в Гааге, в занятиях научными исследованиями. Он умер 8 июня 1695 года в возрасте 66 лет. Его научное наследие составляет одиннадцать увесистых томов.

Несомненно, Гюйгенс был крупнейшим ученым своего времени. Но, кроме того, он был человеком конкретного образа мышления. Его первый биограф, Гравезанд, писал, что Гюйгенс, всю жизнь занимаясь математическими науками, не столько был занят отвлеченными рассуждениями, сколько выявлением всего, что служит непосредственно на пользу людям.

В самом центре Латинского квартала в Париже, по соседству с Пантеоном, Сорбонной и музеем Людовика Великого расположена небольшая тихая улица Декарта. Дом под номером 5 на этой улице известен во всем мире – более полутора веков в нем находилась знаменитая Политехническая школа. История ее восходит к 1794 году – самому героическому и трагическому периоду Великой французской революции. Революционный переворот затронул все сферы жизни французского общества. Пожалуй, впервые в истории политические и общественные деятели стали по-настоящему осознавать роль науки, ее влияние на политику, промышленность и торговлю. Революционные войны и острое соперничество с Англией заставили правительство заняться проблемой централизованной подготовки научных кадров, необходимых для того, чтобы быстро и грамотно решать сложные государственные проблемы. В руководящих органах революционного государства находилось немало известных ученых. Крупнейший геометр Гаспар Монж занимал пост морского министра, талантливый математик и механик Лазар Карно был одним из создателей вооруженных сил республики и военной промышленности. Они-то и явились инициаторами создания высшего учебного заведения нового типа, прославившего Францию.

В старой Франции высшее образование было в основном сосредоточено в 22 университетах – устаревших учреждениях, задавленных грузом средневековых традиций и схоластики. Особенно в плачевном состоянии находились математические и физико-химические науки. Исключение составляли лишь несколько привилегированных военно-инженерных школ (Школа мостов и дорог, Мезьерская школа военных инженеров, Школа учеников артиллерии), в которых, по существу, и была сосредоточена подготовка специалистов в точных науках. Наиболее известной среди них являлась Мезьерская школа, в которой

многие годы преподавал Г.Монж и выпускником которой был Л.Карно.

В первые годы революции были закрыты многие высшие учебные заведения и средние специальные школы. В конце 1793 года высший орган революционной власти – Национальный конвент – начал реорганизацию системы образования в стране. Декретом от 29 фримера II года Республики (19 декабря 1793 года) в стране вводилось бесплатное и обязательное для всех начальное образование.

Примерно в то же время Гаспар Монж делает доклад в Комитете общественного спасения с предложением о создании нового высшего учебного заведения, готовящего специалистов по математике и точным наукам. В противоположность идеалу всестороннего гармонического развития личности, который мерещился XVIII столетию, предполагалось, что создаваемое учебное заведение должно быть специализированным, ориентированным на достижение возможно быстрых результатов в математике, точном естествознании и технических науках. Все меры воздействия на честолюбие, окрыляемое перспективой блестящей жизненной будущности, должны быть привлечены для того, чтобы заставить учащихся работать с максимальным напряжением всех сил. Комитет полностью поддержал Монжа и поручил ему, а также Ламбларди, Фуркруа, Карно и Приеру разработку ее проекта.

21 вантоза II года Республики (11 марта 1794 года) Конвент принял решение об основании нового высшего учебного заведения – Центральной школы общественных работ, назначение которой формулировалось следующим образом: «Воспитывать различных инженеров. Восстановить обучение точным наукам, которое было прервано во время кризисов революции, и давать высокое научное образование молодым людям или для того, чтобы быть употребленными правительством в работах республики, или для того, чтобы приносить в свои родные места просвещение и там расточать действительно полезные знания». В положении о создании школы предусматривались приемные экзамены в 22 городах Франции для отбора 400 лиц мужского пола в возрасте от 16 до 20 лет, которые «доказали преданность республиканским принципам и проявили хорошие знания по арифметике и началам алгебры и геометрии». Трудное внутреннее положение страны не позволило строго выдержать требования, предъявляемые к возрасту поступающих, поэтому самому молодому из них оказалось всего 12 лет, а некоторым из поступивших далеко перевалило за двадцать. Первым директо-

ром школы стал бывший руководитель Школы мостов и дорог член Комитета общественного спасения Ламбларди, но вскоре его сменил Монж, остававшийся на этом посту многие годы. Первоначально школа разместилась в Бурбонском дворце. Занятия начались 21 декабря 1794 года.

Школа общественных работ была рассчитана на три года обучения. В ней преподавались анализ, геометрия, начертательная геометрия, черчение, механика, физика, химия, архитектура и фортификация. Преподавали эти предметы крупнейшие французские ученые – Лагранж, Монж, Лаплас, Бертолле, Лепелетье, Неве. Уже из первого набора школы вышли такие выдающиеся ученые, как астроном и физик Био, механик Пуансо, физик Малюс, открывший поляризацию света, археолог Де Шези, расшифровавший клинописные тексты ассирийцев.

Монж отдает школе все свое время и средства. Он создает курс начертательной геометрии – основы многих технических дисциплин. «Никто не преподавал так хорошо, как он, – вспоминал впоследствии ученик Монжа известный инженер Бриссон. – Жесты, поза, модуляция голоса – все служило ему для развития мыслей. Он всегда следил за глазами слушателей и знал, как угадать степень понимания каждого из них. Мы узнали Монжа, этого добрейшего человека, привязанного к юношеству и преданного наукам. Он всегда был среди нас; после лекций по геометрии, анализу и физике начинались частные беседы, которые еще больше расширяли и укрепляли наши способности. Он был другом каждого воспитанника, побуждал нас к труду и всегда радовался нашим успехам».

Завершился первый учебный год. 1 сентября 1795 года школе присвоили название Политехнической и четко определили ее задачу. Школа становилась двухгодичной. В соответствии со своим названием она должна была выпускать не готовых инженеров, а учащихся, подготовленных для последующей двухгодичной специализации в гражданских и военных высших учебных заведениях более узкого профиля – Школе мостов и дорог, Горном институте, Школе военных инженеров и т. д. Выбор этих учебных заведений не был свободным для оканчивающих Политехническую школу, а определялся качеством диплома. Выпускнику с лучшим дипломом открывался доступ во все учебные заведения, и чем хуже диплом, тем ограниченной оказывался выбор. Кроме выпускников Политехнической школы, в этих специальных учебных заведениях могли обучаться в течение четырех лет и учащиеся со стороны. Однако они не имели такого положения, как питомцы Политехнической школы, которые

рассматривались как государственные служащие и получали определенное содержание.

Была утверждена новая программа приемных экзаменов в Политехническую школу. Абитуриенты экзаменовались по арифметике, алгебре, которая включала в себя решение уравнений первых четырех степеней и теорию рядов, и геометрии.

Чтобы продемонстрировать уровень требований, предъявляемых к абитуриентам, приведем несколько задач по геометрии, которые предлагались в первые годы существования школы.

1. Доказать, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.

2. Разделим каждую сторону треугольника на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон, и соединим точки деления с противоположными вершинами. Доказать, что полученные таким образом прямые пересекаются в одной точке, которая является центром тяжести треугольника, образованного ее проекциями на стороны данного треугольника.

3. Даны угол AOB и точка P . Найти на стороне OA такую точку M , чтобы две окружности C и C' касательные к OB и проходящие через точки M и P , пересекались под данным углом.

4. Построить треугольник по углу, периметру и площади.

5. Пусть a, b, c, d – стороны данного четырехугольника, взятые в последовательном порядке. Доказать, что радиусы окружностей, описанных около четырехугольников, один из которых образован биссектрисами внутренних углов, а другой – биссектрисами внешних углов данного четырехугольника, относятся как $\frac{a + c - b - d}{a + c + b + d}$.

Преподавание в Политехнической школе осуществляли профессор, читающие лекции, репетиторы, объясняющие лекции и ведущие практические занятия, и, наконец, экзаменаторы, проверяющие знания с помощью очень строгих подробных экзаменов, которым подвергался каждый из обучаемых. Преподавание велось по хорошо разработанному учебному плану. В первые десятилетия существования школы математические дисциплины стояли в этом плане на первом месте и занимали около 20 часов в неделю. В число этих дисциплин входили анализ, геометрия (синтетическая и аналитическая), механика, начертательная геометрия и черчение. На втором году обучения большое место отводилось экспериментальной физике и химии.

В законодательном порядке была принята обязательная публикация всех лекций, читаемых в Политехнической школе. Лекционные курсы литографировались, и каждый учащийся получал отпечатки, которые распространялись далеко за преде-

лы школы. Влияние этих лекций было настолько велико, что большая часть учебников по математике начала XIX века была написана во Франции именно на их основе. Руководство школы всеми силами стремилось разжечь любознательность своих питомцев, стимулировать их научное творчество. Ревностно претворялся в жизнь девиз Политехнической школы: «Ради отечества, наук и славы».

18 брюмера VIII года Республики (9 ноября 1799 года) тридцатилетний командующий войсками Парижского военного округа генерал Наполеон Бонапарт совершил государственный переворот и стал первым консулом Республики. Талантливый полководец, Наполеон был, кроме того, членом Института Франции¹ по секции механики; он интересовался математикой, занимался астрономией, написал статью по баллистике. Ему было важно заручиться поддержкой ученых и воспитанников-политехников. Вскоре после прихода к власти он дает звания сенаторов трем профессорам школы – Монжу, Бертолле и Лапласу. Был учрежден новый устав школы, сохранившийся в ней более чем на полвека – до 1852 года.

В мае 1804 года сенат провозгласил Наполеона «божьей милостью и установлениями Республики императором французов». Франция стала империей. Наполеон реорганизовал Политехническую школу, подчинив ее военному министерству. И до 1804 года положение политехников немногим отличалось от положения курсантов военных училищ. Основанная в самые тяжелые годы революции, школа фактически жила по военному распорядку. Теперь же, декретом от 16 июля 1804 года, школа официально становилась военной. Из учащихся сформировали батальон, состоящий из пяти рот. Командовал школой генерал. Во время учебы политехники числились на военной службе и размещались в интернате на казарменном положении. Им платили жалование сержантов артиллерии. Школа была переведена из Бурбонского дворца на улицу Декарта в реконструированные помещения двух старинных учебных заведений: Наваррского коллежа и коллежа Де Бонкур.

Непрерывные войны, которые вела Франция, поглощали учителей и учащихся и сделали обычным явлением пониженные экзаменационные требования, ускоренные курсы и т. п. Прекрас-

¹ Основанный в 1795 году Институт Франции объединяет пять академий: Французскую Академию, Академию письменности и литературы, Академию нравственных и политических наук, Академию наук и Академию художеств. Секция механики относится к Академии наук.

но осознавая уникальность нового учебного заведения, Наполеон освободил школу от непосильных военных поборов, заявив, что не следует убивать курицу, несущую золотые яйца. Политехническая школа вновь получила возможность роста и развития.

Докладывая в 1794 году Национальному конвенту проект закона о Политехнической школе, член Комитета общественного спасения Фуркруа заявил: «Я не колеблясь считаю, что новая школа в скором времени составит славу Франции». Его слова оказались пророческими. Политехническая школа развилась в один из важнейших факторов научного прогресса XIX столетия. Престиж ее был столь велик, что каждый из политехников, какого бы высокого положения в обществе он ни достигал, до конца своей жизни после указания своей фамилии писал: «Бывший учащийся Политехнической школы». Школа создала научную и техническую элиту, организованную не по сословным признакам, а по личным способностям и таланту. Невозможно перечислить всех выдающихся деятелей науки, техники, военачальников, которых она воспитала. Среди ее выпускников – прославленные французские математики Коши, Эрмит, Жордан и Пуанкаре, физики Араго и Френель, вся династия Беккерелей, астроном Леверье, химик Гей-Люссак, философы Конт и Сорель, маршалы Жоффр и Фош. И по сей день не меркнет слава этого уникального учебного заведения. Ныне она готовит высшие технические кадры страны. Подавляющее большинство современных ведущих инженеров и промышленников, многие государственные деятели были питомцами школы, рожденной Великой французской революцией.

«Весною 1832 года Париж кипел и был готов к революционному взрыву, хотя три месяца без перерыва холера леденила умы и набросила на их волнение мрачный покров спокойствия. Великий город в это время походил на заряженную пушку, для которой бывает достаточно одной искры, чтобы она выстрелила». Это строки из романа Виктора Гюго «Отверженные», бывшего очевидцем тех грозных событий. Во вторник 5 июня в Париже вспыхнуло грандиозное восстание, на баррикадах которого погиб Гаврош – «маленький человек с великой душой». По-видимому, лишь немногие обратили внимание в эти тревожные дни на коротенькую заметку в парижских газетах. В ней сообщалось, что утром 30 мая на дуэли в возрасте 20 лет погиб Эварист Галуа, известный своими политическими выступлениями выпускник коллежа Луи-ле-Гран. В субботу 2 июня он был похоронен в общей могиле на кладбище Монпарнас. Ныне от этого погребения не сохранилось и следа.

После смерти Галуа остались шестьдесят страниц его неоконченного математического сочинения. Эта рукопись попала к Огюсту Шевалье, другу Галуа, но тот не мог найти никого, кто согласился бы ее издать; она увидела свет лишь в 1846 году. В этой рукописи содержалась теория, которая вот уже 140 лет оказывает влияние не только на математику, но и на все точное естествознание...

Жизнь и смерть

*Nit ens lux, horrenda procella,
tenebris aeternis inuoluta.¹*

Эварист Галуа родился 26 октября 1811 года в старинном городке Бур-ля-Рен, расположенном в десяти километрах от

Опубликовано в «Кванте» №12 за 1986 г.

¹ «Ослепляющий свет, ужасная буря, окруженная вечным мраком» (лат.). Этими словами оканчивается одно из писем, написанных Э. Галуа в ночь перед дуэлью.

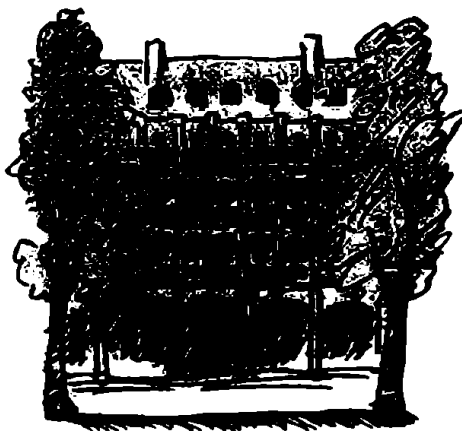
Парижа. Его отец, Никола Габриэль, руководил там учебным заведением для юношей. В 1815 году он был избран мэром городка и оставался на этом посту до самой своей кончины. Первые двенадцать лет своей жизни Эварист получал воспитание и образование под руководством матери. Мальчик изучал греческий и латинский языки, проводил время за Плутархом и Титом Ливием.

В октябре 1823 года Эварист был принят в Королевский коллеж Луи-ле-Гран в Париже (ныне лицей Луи-ле-Гран), знаменитое учебное заведение, воспитанниками которого были Мольер, Гюго, Робеспьер, Делакруа. В коллеже Галуа получал стипендию и жил на полном пансионе. Первые три года он считался одним из лучших учеников и с удовольствием занимался языками, литературой, историей. В октябре 1826 года Галуа начал заниматься в старшем классе коллежа – классе риторики, однако у него появились признаки утомления, и по рекомендации директора в январе 1827 года он вернулся на повторный курс. Там он вновь без малейшего усилия стал одним из первых учеников, получил награду за перевод с греческого и похвальные листы по четырем другим предметам. В это же время в жизни Эвариста произошло важное событие: он открыл для себя мир математики.

Дело в том, что до класса риторики все учащиеся коллежа занимались по общей программе, включавшей в себя гуманитарные дисциплины и лишь начатки точных наук. Однако учащиеся, питавшие интерес к точным наукам, могли в последние два года обучения заниматься математикой в подготовительном математическом классе. Те, кто хотел посвятить себя математике, должны были после подготовительного пройти годичный основной и годичный специальный математические классы.

Галуа воспользовался возвращением на повторный курс, чтобы одновременно поступить в подготовительный математический класс. Почти сразу же обнаружились его необыкновенные математические способности: он без труда одолел непростую книгу Лежандра «Основы геометрии» и принялся изучать сочинения Лагранжа «Решение численных уравнений», «Теория аналитических функций», «Лекции по теории функций».

Осенью 1827 года Эварист возвращается в класс риторики и продолжает занятия в подготовительном математическом классе. Школьная рутина тяготит его; он целиком поглощен математикой. По словам одного из учителей Галуа: «Страсть к математике владеет им; я думаю, что для него было бы лучше, если бы его



Внутренний двор Лицея Луи-ле-Гран (Париж, улица Сэн-Жак, 123). В этом лицее (в те времена — Королевском коллеже) Галуа провел шесть лет — с октября 1823 года по декабрь 1829 года

родители согласились, чтобы он занимался только этой наукой: в классе риторики он теряет время и только изводит своих учителей и навлекает на себя наказания».

В это время Эварист знакомится с работами Гаусса и Абеля и чувствует, что способен сделать не меньше. Будучи всего лишь учеником подготовительного класса, он без посторонней помощи готовится к экзаменам в Политехническую школу — лучшее по тем временам высшее учебное заведение Франции. Эва-

рист верит, что в ней найдут применение все силы и энергия его ума и сердца.

Попытка поступить в Политехническую школу кончилась неудачей. Провал очень огорчил Галуа и, по словам историка математики Дюпюи, «явился первой из несправедливостей, которые в конце концов отравили ему жизнь». Эварист возвращается в порядком надоевший ему коллеж и, перескочив основной, поступает в специальный математический класс. Работал в нем тогда Луи-Поль Ришар, замечательный преподаватель, горячо любивший свою науку. Среди тех, кто в разные годы занимался у него, были, кроме Галуа, знаменитый астроном Леверье и выдающийся математик Эрмит.

Ришар с большим вниманием отнесся к юному ученику, которого он считал самым одаренным из своих воспитанников. Отзывы Ришара о Галуа лаконичны: «Галуа работает только в высших областях математики», «Он значительно выше всех своих товарищей». Под руководством Ришара Эварист выполнил свою первую научную работу «Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях», опубликованную в марте 1829 года в «*Le annale de математик*». В это же время под влиянием работ Лагранжа Галуа начинает интенсивно заниматься одной из самых трудных математических проблем того времени — проблемой разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

Проблема эта имеет долгую историю. Еще вавилоняне открыли способ решения уравнения второй степени $ax^2 + bx + c = 0$. Корни его в современной символике задаются формулой

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

в которую входят четыре арифметических действия над коэффициентами, а также квадратный радикал. В начале шестнадцатого века Сципионе дель Ферро и Никколо Фонтана, более известный под именем Тарталья, получили формулу для корней кубического уравнения, в которую входят четыре арифметических действия и квадратичный и кубический радикалы. Несколько позже Лодовико Феррари открыл формулу для корней уравнения четвертой степени, в которую входят радикалы самое большее четвертой степени. Естественно было ожидать, что корни алгебраического уравнения степени n

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

должны выражаться через радикалы самое большее n -й степени. Но, несмотря на титанические усилия самых выдающихся математиков на протяжении почти трех веков, такую формулу не удалось получить даже для уравнения пятой степени. В конце восемнадцатого века математики начали подозревать, что формул в радикалах для уравнений степени $n \geq 5$ просто не существует, потому-то их и не удастся найти.

Важный шаг в исследовании алгебраических уравнений был сделан Жозефом Луи Лагранжем (см., например, статью С. Гиндикина «Жозеф Луи Лагранж» в «Кванте» №9 за 1986 г.), открывшим, что решение уравнений в радикалах тесно связано с перестановками их корней. Эта идея Лагранжа, названная им «истинной философией решения уравнений», была существенно развита гениальным норвежским математиком Нильсом Генриком Абелем. В 1824 году в возрасте двадцати двух лет Абель доказал, что не существует формул, которые бы решали в радикалах алгебраическое уравнение степени $n \geq 5$ общего вида.

После появления теоремы Абеля сразу же встал вопрос о нахождении необходимого и достаточного условия, которое по коэффициентам a_0, a_1, \dots, a_n любого уравнения позволяло бы судить, решается оно в радикалах или нет.

В течение 1829—1831 гг. Эварист полностью решил эту труднейшую проблему. Первые результаты по теории уравнений появились у него еще весной 1829 года. Галуа направил их

в Академию наук. Рассмотреть его работу взялся один из крупнейших французских математиков Коши, но... где-то ее затерял.

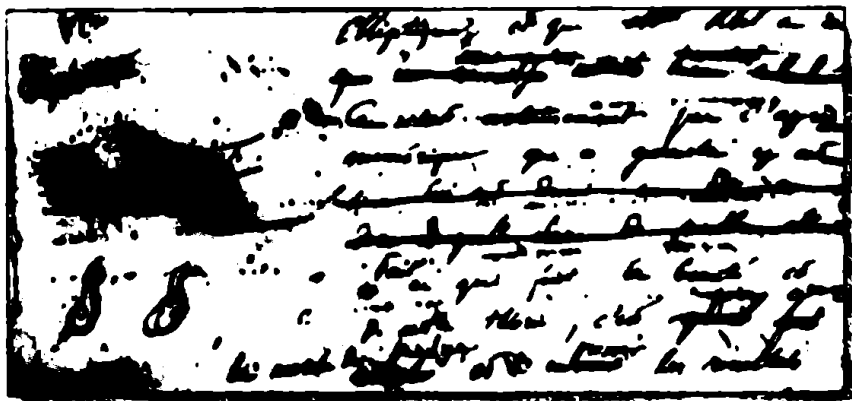
По окончании учебного года в специальном математическом классе Галуа вновь сделал попытку поступить в Политехническую школу и вновь провалился. Что произошло на экзамене, доподлинно неизвестно. Позже Галуа упомянул о нем, написав, что на экзамене его сопровождал «сумасшедший хохот экзаменаторов». Экзаменаторами Галуа были Вине и Лефевюр де Фурси. Мы не знаем, какие оценки они поставили Галуа; так или иначе, в Политехническую школу он не попал.

В то время, когда Эварист готовился к вступительным экзаменам, на него свалилась непоправимая беда: 2 июля 1829 года его отец, затравленный местным кюре и иезуитами, покончил с собой. Эти тяжелые дни, почти совпавшие по времени с его провалом, Эварист провел дома, вместе с матерью и младшим братом Альфредом.

По совету Ришара Эварист решил поступить в Приготовительную школу, жалкий остаток знаменитой Нормальной школы, созданной в годы Великой французской революции. В 1822 году Бурбоны закрыли Нормальную школу, а в 1826 году она была восстановлена под названием Приготовительной школы, как продолжение коллежа Луи-ле-Гран. Трехгодичная Приготовительная школа готовила учителей и государственных чиновников. 20 февраля 1830 года Эварист Галуа стал ее студентом.

Первый год обучения в Приготовительной школе оказался самым успешным в жизни Галуа. Здесь он познакомился с Огюстом Шевалье, и это знакомство вскоре переросло в крепкую дружбу. Галуа увлеченно занимался математикой. Он написал три работы и представил их на конкурс в Академию.

Неожиданно на него обрушивается новый удар. Рукопись Галуа попала в руки секретаря Академии Фурье, который вскоре после этого ... умер. В его бумагах рукописи Галуа не оказалось — она исчезла, как и первая, а вместе с ней надежда получить Большую математическую премию. Правда, у Эвариста сохранились копии посланных работ, и он опубликовал их в апрельском и июньском номерах «Бюллетеня математических наук», но это было слабым утешением. В своих повторяющихся несчастьях он увидел не волю случая, а результат плохой социальной организации, которая обрекала талант на вечные лишения к выгоде посредственности. И со всем пылом юности Эварист включается в борьбу за политическое переустройство общества.



Фрагмент черного варианта математической рукописи Галуа

В июле 1830 года давно собиравшиеся над режимом Бурбонов тучи разразились революционной грозой, лишившей власти короля Карла X. Симпатии Галуа целиком на стороне республиканцев. Он активно участвует в работе революционных кружков, вступает в Общество друзей народа. Но чаяниям республиканцев не удалось сбыться: к власти пришел ставленник крупного капитала «король-буржуа» Луи-Филипп. Возбуждение в Париже не утихает.

Осенью 1830 года Эварист выступает в печати с резкой критикой двурушнического поведения в июльские дни директора Приготовительной школы Гиньо. В результате 9 декабря его исключают из школы. Надежда на математическую карьеру рухнула. Эварист вступает в артиллерию национальной гвардии, в большинстве своем состоявшую из членов Общества друзей народа. Это была вооруженная сила революции, и правительство Луи-Филиппа вскоре распускает национальную гвардию. Эварист остается без средств к существованию; лишь частные уроки позволяют ему свести концы с концами.

Все помыслы его в это время отданы революции — математика отходит на второй план. И все же он находит время и силы, чтобы еще раз послать в Академию ту самую работу, которая была потеряна в прошлом году. Работа попала на отзыв двум академикам — Лакруа и Пуассону. После длительных проволочек они сообщают, что не могут оценить рукопись положительно.

В июне 1831 года Галуа предстает перед судом по обвинению «в попытке спровоцировать покушение на жизнь и особу короля Французов путем заявления, сделанного в обществен-

ном месте во время публичного собрания». Суд присяжных оправдывает Галуа, но он попадает под тайный надзор политической полиции.

14 июля 1831 года Галуа принимает участие в демонстрации. Ее участники протестуют против запрещения правительством Луи-Филиппа свободы манифестаций. Многие участники этой демонстрации были арестованы, и Эварист оказался в тюрьме Сент-Пелажи. Здесь он встретил свое двадцатилетие, и здесь же им было отредактировано его основное математическое сочинение. 16 марта 1832 года Галуа переводят в тюремную больницу с подозрением на холеру. Есть сведения, что Галуа оставался в ней еще некоторое время после того, как 29 апреля кончился срок его заключения. О его жизни в течение мая 1832 года не сохранилось никаких следов. Утром 30 мая какой-то прохожий нашел его тяжело раненным после дуэли на пистолетах на берегу пруда Гласьер в парижском пригороде Жантийи. На следующий день в 10 часов утра Галуа скончался. Причина его дуэли и его противник достоверно неизвестны. Перед смертью он написал письмо своему другу Огюсту Шевалье с просьбой показать его рукопись немецким математикам Якоби и Гауссу. Однако рукопись увидела свет лишь в 1846 году и осталась практически незамеченной. Идеи Галуа по настоящему были поняты лишь в 70-х годах, после выхода в свет книги К.Жордана «Алгебраические уравнения и теория подстановок».

Бессмертие

В теории уравнений я исследовал, в каких случаях уравнения разрешаются в радикалах, что дало мне повод углубить эту теорию и описать все возможные преобразования уравнения, допустимые даже тогда, когда оно не решается в радикалах.

Рукопись, оставшаяся после Галуа, из которой взята эта цитата, называлась «Мемуар об условиях разрешимости уравнений в радикалах». Содержащиеся в этом мемуаре идеи были не поняты современниками Галуа и считаются нелегкими для изучения даже сейчас. В то же время, формулировка теоремы Галуа не сложна. Правда, вначале нужно усвоить несколько новых понятий.

Пусть имеется n предметов, которые мы будем обозначать натуральными числами 1, 2, ..., n . Их *подстановкой* называет-

ся преобразование множества этих предметов, задаваемое таблицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

где i_1, i_2, \dots, i_n — это те же числа $1, 2, \dots, n$, но записанные в другом порядке. Каждая подстановка заключается в том, что на месте числа, стоящего в верхней строчке, ставится подписанное под ним число в нижней строчке.

Из n чисел можно сделать $n!$ различных подстановок. Например, из трех чисел $1, 2, 3$ можно сделать следующие подстановки:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix},$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \quad p_4 = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \quad p_5 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}.$$

Множество подстановок из n предметов обычно обозначается через S_n .

С подстановками из одного и того же числа предметов можно совершать различные алгебраические операции. Прежде всего, их можно перемножать. *Перемножить* две подстановки — это значит последовательно произвести их одну за другой. В результате получится опять подстановка, называемая *произведением* двух данных подстановок. Перемножим, например, подстановки из трех предметов

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}.$$

В силу первой подстановки единица заменится двойкой, а в силу второй подстановки эта двойка останется на месте. Таким образом, в результате последовательного совершения обеих подстановок единица перейдет в двойку. Точно так же можно убедиться, что двойка перейдет в тройку, а тройка перейдет в единицу:

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}.$$

Аналогично перемножаются и любые две другие подстановки из трех предметов. В результате получается следующая таблица

Таблица 1

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_2	p_0	p_4	p_5	p_3
p_2	p_2	p_0	p_1	p_5	p_3	p_4
p_3	p_3	p_5	p_4	p_0	p_2	p_1
p_4	p_4	p_3	p_5	p_1	p_0	p_2
p_5	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0

Непосредственной проверкой можно убедиться, что умножение подстановок удовлетворяет правилу раскрытия скобок: $(ab)c = a(bc)$ для любых трех подстановок a, b, c из S_n . Тождественная подстановка

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

есть единственная подстановка, удовлетворяющая условию

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & i_2 & \dots & i_{n_1} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

для произвольной подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

из S_n .

У каждой подстановки имеется обратная к ней, дающая в произведении с данной тождественную подстановку: обратная подстановка к данной ставит все числа, смещенные подстановкой, на их прежние места. Например, для подстановок из трех предметов имеем

$$p_0^{-1} = p_0, \quad p_1^{-1} = p_2, \quad p_2^{-1} = p_1, \quad p_3^{-1} = p_3, \quad p_4^{-1} = p_4, \quad p_5^{-1} = p_5.$$

Введем теперь следующее определение.

*Группой*² (более точно, *конечной группой*) называется любое множество G из S_n , которое вместе с каждым двумя своими

² Понятие группы впервые появилось в работах Лагранжа и Руфини. Термин «группа» введен Галуа.

элементами a и b содержит элемент $a \cdot b$ и вместе с каждым элементом a — элемент a^{-1} . В частности, само множество S_n также является группой.

Уже на примере группы S_3 видно, что для умножения подстановок не выполняется переместительный закон: не всегда $a \cdot b = b \cdot a$. Если же для всех пар a, b элементов некоторой группы выполняется последнее равенство, то G называется *коммутативной* или *абелевой* группой. Проверьте, что из всех групп S_n , $n > 1$, коммутативна лишь группа S_2 .

Может случиться, что часть H группы G сама образует группу. Тогда H называется *подгруппой* группы G . Например, каждая группа содержит подгруппу, состоящую из тождественной подстановки e . С другой стороны, каждая (конечная) группа является подгруппой некоторой группы S_n . Тот факт, что H — подгруппа в G , обозначается так: $H \leq G$.

Для иллюстрации введенных понятий опишем все подгруппы в группе S_3 . Из таблицы умножения (табл. 1) видно, что в S_3 содержится одна подгруппа, состоящая из одного элемента p_0 , три подгруппы из двух элементов (p_0, p_3) , (p_0, p_4) , (p_0, p_5) и одна подгруппа из трех элементов (p_0, p_1, p_2) . В таблице 1 эта подгруппа выделена. Поскольку она еще встретится нам в дальнейшем, мы введем для нее специальное обозначение Z_3 . Все эти подгруппы коммутативны. Предлагаем читателю самому убедиться, что других подгрупп в S_3 нет.

Пусть G — какая-нибудь группа и a, b — ее элементы. Выражение $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ называется *коммутатором* элементов a и b : оно служит корректирующим членом для того, чтобы поменять местами a и b :

$$ab = [a, b]ba.$$

Если $ab = ba$, то $[a, b] = e$. Понятно, что чем больше в группе G коммутаторов, отличных от e , тем значительнее отклонение группы G от коммутативной. Назовем *производной группой* группы G ее подгруппу G' , состоящую из всевозможных произведений вида

$$[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdot \dots \cdot [a_k, b_k]$$

с $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ из G . Ясно, что если группа G коммутативна, то G' состоит всего лишь из тождественной подстановки e . В качестве несложного упражнения предлагаем читателю проверить, что коммутаторы группы S_3 задаются следующей табли-

Таблица 2

$[p_i, p_j]$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0
p_1	p_0	p_0	p_0	p_2	p_2	p_2
p_2	p_0	p_0	p_0	p_1	p_1	p_1
p_3	p_0	p_1	p_2	p_0	p_1	p_2
p_4	p_0	p_1	p_2	p_2	p_0	p_1
p_5	p_0	p_1	p_2	p_1	p_2	p_0

Для G' также можно рассмотреть производную группу $(G')' = G''$, называемую *второй производной группой* группы G . Продолжая этот процесс, мы получим k -ю производную группу $G^{(k)} = (G^{(k-1)})'$. Ясно, что $G^{(k)} \leq G^{(k-1)}$. Тем самым возникает цепочка вложенных друг в друга подгрупп:

$$\dots \leq G^{(k)} \leq G^{(k-1)} \leq \dots \leq G'' \leq G' \leq G.$$

Если эта цепочка обрывается на подгруппе, состоящей лишь из тождественной подстановки, т.е. если $G^{(m)} = e$ для некоторого числа m , то группа G называется *разрешимой*.

Ясно, что *любая коммутативная группа разрешима*. В частности, разрешима группа S_2 . Покажем, что *группа S_3 также разрешима*. Из таблицы 2 следует, что все коммутаторы из S_3 лежат в Z_3 , поэтому $S'_3 = Z_3$. Из таблицы 1 видно, что группа Z_3 коммутативна, поэтому $S''_3 = Z'_3 = e$.

Далеко не все группы разрешимы. Например, *группы S_n разрешимы лишь для $n = 2, 3, 4$* (это весьма непростое утверждение впервые появилось в мемуаре Галуа).

Теперь мы в состоянии объяснить основную идею теории Галуа. Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 -$$

произвольное уравнение n -й степени, где a_0, a_1, \dots, a_n — заданные числа. Еще в конце XVIII века Карл Фридрих Гаусс доказал, что при любых a_0, a_1, \dots, a_n данное уравнение имеет n комплексных корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Мы хотим выяснить, существуют ли формулы, выражающие корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ через коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n с помощью четырех арифметических действий и извлечения корней. Для простоты условимся считать, что a_0, a_1, \dots, a_n — это

рациональные числа и все корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ различны. Свяжем с $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ множество $Q(f)$, состоящее из всех чисел вида

$$P(\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

где P — многочлен от n переменных с рациональными коэффициентами. Рассмотрим преобразования множества $Q(f)$, переводящие сумму чисел в сумму, произведение в произведение и оставляющие на месте рациональные числа. Если β — корень нашего уравнения, т.е.

$$a_0\beta^n + a_1\beta^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

а φ — такое преобразование, то

$$\varphi(a_0\beta^n + a_1\beta^{n-1} + \dots + a_n) = a_0\varphi(\beta)^n + a_1\varphi(\beta)^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Значит, $\varphi(\beta)$ — корень того же уравнения, т.е. φ *просто переставляет корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ между собой*, задавая тем самым некоторую подстановку

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Все такие подстановки образуют некоторую группу, содержащуюся в S_n . Эта группа называется *группой Галуа уравнения $f(x) = 0$* и обозначается $G(f)$.

Основная теорема теории Галуа

Уравнение $f = 0$ разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда разрешима его группа Галуа $G(f)$.

В теореме Галуа ценно то, что группу $G(f)$, как правило, можно вычислять, не зная корней уравнения $f = 0$, только по его коэффициентам. Рассмотрим, например, уравнение $x^3 + b + c = 0$ с рациональными коэффициентами, не имеющее рациональных корней. Пусть $\Delta = -4b^3 - 27c^2$. Если Δ не является полным квадратом, то $G(f) = S_3$, в противном случае $G(f) = Z_3$. Когда коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n выбраны более-менее произвольно, то группой Галуа уравнения $f = 0$ будет S_n . Поскольку группа S_n не является разрешимой для $n \geq 5$, то *общее уравнение степени $n \geq 5$ не разрешимо в радикалах*.

Главное значение работы Галуа состоит даже не в том, что он дал исчерпывающий ответ на вопрос, три века бывший вызовом всем математикам мира, а в созданном им методе, центральное

место в котором занимают понятия группы и симметрии. Идеи Галуа оказались плодотворными во всех без исключения областях математики и теоретической физики. От абстрактной алгебры до теории элементарных частиц — таков спектр применения общей идеи симметрии. За всю многовековую историю математики не было иного примера, чтобы столь малая по объему работа оказала такое огромное влияние.

* * *

...Уже светало, когда Эварист Галуа окончил последнее в своей жизни письмо. «Дорогие друзья! Меня вызвали... Я не мог отказаться... Не забывайте меня! Ведь судьба не дала мне прожить столько, чтобы мое имя узнала родина».

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

23 февраля 1826 года на заседании физико-математического отделения Императорского Казанского университета был прочитан доклад под названием «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях». Эта дата рассматривается как день рождения неевклидовой геометрии и является гранью двух эпох. Предшествующие двадцать пять веков были эпохой создания классической геометрии. Принципы, лежащие в ее основе, и вместе с ними и вся геометрия считались незыблемыми, не допускающими никаких изменений. Но в этот февральский день родилась новая геометрия, неизмеримо расширившая человеческие представления о пространстве и форме, радикально изменившая устоявшиеся взгляды на всю математику и окружающий мир. Творцу этой новой геометрии было тогда 33 года. Его звали Николай Иванович Лобачевский.

О первых годах жизни Лобачевского известно очень немного. Родился он 1 декабря 1792 г. в Нижнем Новгороде в бедной семье. Отец его — коллежский регистратор Иван Максимович Лобачевский — был уездным землемером, мать — Прасковья Александровна — происходила из нижегородских мещан. В семье Лобачевских было три сына — Александр, Николай и Алексей. Семья рано лишилась кормильца. Точная дата смерти Ивана Максимовича неизвестна; судя по записям



Н. И. Лобачевский

Портрет Н.И.Лобачевского работы художника Крюкова

нижегородской Сретенской церкви, это случилось в 1801 году.

В ноябре 1802 года по ходатайству Прасковьи Александровны ее сыновья были приняты в первую Казанскую гимназию на казенное содержание. Жизнь гимназии того времени ярко описана в «Семейной хронике» знаменитым русским писателем С.Т.Аксаковым (в декабре 1800 года он был зачислен казеннокоштным воспитанником в ту же самую гимназию). Курс был четырехлетним. Кроме первоначальных и общих предметов, здесь преподавались языки — латинский, французский, немецкий и татарский; из философских наук — логика и практическая философия; из физико-математических наук — геометрия, тригонометрия, механика, гидравлика, физика, химия, натуральная история (геология), землеведение и гражданская архитектура; из юридических — практическое законоискусство; из военных — артиллерия, фортификация, тактика; и, наконец, искусства — рисование, музыка, фехтование и танцы. Усвоение этой программы требовало очень большого напряжения, редко кому удавалось с ней справиться. Большинство учащихся оставались в одном классе по два, иногда по три года.

Несмотря на трудную программу, учился Николай Лобачевский очень легко и хорошо. В гимназических ведомостях он аттестован «весьма прилежным и благонравным, занимающимся с особым прилежанием математикой и латинским языком». В январе 1807 года Николай Лобачевский окончил гимназию и поступил в Казанский университет, основанный в ноябре 1804 года высочайшим повелением императора Александра I. Устав вновь открытого университета не отличался от типового устава российских университетов того времени. Он был построен на основах широкой автономии: все должностные лица университета, начиная с преподавателя и кончая ректором, должны были избираться советом университета, университет имел свой суд и даже свою полицию; он не только пользовался правом бесцензурного печатания своих изданий, но его редакционный комитет служил органом, разрешавшим к печати все научные произведения, публиковавшиеся в Казани, кем бы они ни были написаны.

Первоначально университету было предоставлено здание, отстроенное для губернаторского дома, и один из корпусов гимназии. В первые три года занятия в университете велись силами преподавателей гимназии, а затем на работу в университет были приглашены профессора из-за границы. Разумеется, эти профессора не знали ни слова по-русски, так что преподавание велось на немецком и французском языках.

В 1808 году для преподавания математических наук в Казанский университет прибыл профессор Бартельс (Мартин Федорович, как его звали в России), сыгравший важную роль в математическом образовании Лобачевского. В свое время Бартельс был помощником учителя в школе, где учился великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс. Затем Бартельс учился и преподавал в Геттингенском университете, где вновь встретился с Гауссом и не прерывал с ним связи до конца жизни. По-видимому, Гаусс рекомендовал Бартельса секретарю Петербургской Академии наук Фуссу, который занимался подбором профессоров для вновь созданного университета. Бартельс был хорошо образованным ученым, прекрасным педагогом и чрезвычайно добросовестным человеком. Он был одним из немногих иностранных профессоров, вложивших в работу всю свою энергию, все внимание и всю любовь к делу. В Казани он пробыл двенадцать лет и положил начало казанской математической школе. Крупным математиком он не был, однако писал хорошие учебники и умел привить молодым людям тягу к научному творчеству.

Студенты университета изучали в то время следующие дисциплины: философию, историю, географию, всеобщую и российскую статистику, греческий и латинский языки, российскую словесность, высшую арифметику, алгебру, геометрию, конические сечения, дифференциальное, интегральное и вариационное исчисления, аналитическую геометрию, механику, аэростатику, гидростатику, гидравлику, физику, химию, естественную историю, технологию, право. Во всех дисциплинах Лобачевский показывал отличные успехи. Но особенно углубленно он занимался математикой. В своем отчете попечителю Казанского учебного округа профессор Бартельс писал: «Студенты Симонов и Лобачевский, особливо же последний, оказали столько успехов, что они даже во всяком европейском университете были бы отличными, и я льщусь надеждой, что если они продолжать будут упражняться в усовершенствовании своем, то займут значащие места в математическом кругу».

3 августа 1811 года Лобачевский окончил университет и был утвержден в звании магистра. По уставу университета магистры должны были, с одной стороны, готовиться к научной и профессорской деятельности, а с другой — быть помощниками профессоров. Одновременно с Лобачевским звания магистра был удостоен и его однокурсник И. М. Симонов. Это был человек, обладавший большими дарованиями, преимущественно занимавшийся астрономией. С этого времени они в течение свыше 35 лет вели

в университете без видимых разногласий совместную работу, сменяя друг друга на кафедрах и административных должностях.

Математике оба молодых магистра учились у Бартельса. В качестве основных сочинений, над которыми должен был работать Лобачевский, Бартельс выбрал пятитомную «Небесную механику» Лагранжа и «Арифметические исследования» Гаусса. В 1813 году Лобачевский выполняет свою первую самостоятельную научную работу: находит разложение многочлена деления круга²

$$P_n(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1$$

на неприводимые множители для некоторых значений показателя n .

26 марта 1814 года распоряжением министра народного просвещения Лобачевский был возведен в звание адъюнкта физико-математических наук (по современной терминологии — кандидата); таким образом, в возрасте 21 года Лобачевский официально становится преподавателем университета. Он ведет активнейшую преподавательскую работу, читает многочисленные курсы, поражающие широтой диапазона: элементарная математика, все без исключения разделы высшей математики, механика, опытная и теоретическая физика, теоретическая и наблюдательная астрономия. К началу двадцатых годов им написаны два учебника «Алгебра. Исчисление конечных» и «Геометрия» (опубликованные значительно позже), в рукописном виде распространявшиеся среди студентов. И все эти годы Лобачевский углубленно занимается теорией параллельных.

Проблема параллельных уходит своими корнями в античную Грецию. Проникновение геометрии из Междуречья и Египта в Грецию привело к тому, что отрывочные, опытные, на глаз установленные факты здесь начинают превращаться в цепь связанных между собой предложений; каждое из них занимает в этой цепи определенное место и логически вытекает из предыдущих. Соответственно этому развитие геометрии шло в Греции в двух направлениях: во-первых, стремились логическими средствами найти возможно большее число геометрических истин; во-вторых, старались свести к возможному минимуму те геометрические факты, которые устанавливаются опытом. Огромную роль в формировании такого взгляда на геометрию сыграл

¹ Об этом многочлене было рассказано, например, в статье С. Гиндикина «Дебют Гаусса» («Квант», 1972, №3)

великий греческий ученый Аристотель (384—322 г. до н.э.), создавший теорию дедукции, т. е. логического вывода. По схеме Аристотеля всякая дедуктивная наука должна начинаться установлением основных понятий, не подлежащих определению, и аксиом — основных истин, не подлежащих доказательству. Все остальное должно получаться строгим логическим выводом из этих исходных предпосылок. Применительно к геометрии этот замысел был в известной мере выполнен Евклидом (конец IV — начало III в. до н.э.), создавшим первый в истории свод геометрических знаний в 13 книгах — «Начала». Схема Аристотеля реализуется в «Началах» следующим образом. Первой книге предпосланы аксиомы и постулаты. Аксиомы, или, как называл их Евклид, общие достояния нашего ума, — это истины, относящиеся ко всяким величинам, не только геометрическим (например: две величины, порознь равные третьей, равны между собой; если к равным прибавить равные, то получим равные). Постулаты — это требования геометрического характера, которые нужно принять, чтобы на их основе делать все дальнейшие выводы. Этих постулатов у Евклида пять. Вот их оригинальные формулировки. «Нужно потребовать:

I. *чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию;*

II. *чтобы каждую ограниченную прямую можно было продолжить неограниченно;*

III. *чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом;*

IV. *чтобы все прямые углы были равны между собой;*

V. *чтобы если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов оказалась меньше двух прямых, то эти прямые при достаточном их продолжении пересекались бы и притом с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.»*

Необходимость последнего, пятого постулата для построения геометрии не кажется очевидной: сам Евклид доказывает целый ряд теорем, не опираясь на него, и совершенно неясно, почему в этот ряд не могут быть включены все теоремы евклидовой геометрии. Особая роль пятого постулата, его сложность и недостаточная наглядность привели к тому, что математики позднейших времен стали пытаться доказать его как теорему. Некоторые из них старались вывести этот постулат из остальных постулатов и аксиом Евклида, не добавляя к ним новых утверждений, другие же заменяли его иной аксиомой, которую они считали более простой и наглядной. Но анализ этих новых

аксиом неизменно показывал, что при такой замене использовались утверждения, равносильные пятому постулату. Такими наиболее употребительными заменителями являются утверждения: «через точку вне прямой можно провести в их плоскости не более одной прямой, не пересекающей данной», «сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым» и т.д.

Многие попытки доказательства проводились методом доказательства от противного, т.е. предполагалось, что пятый постулат неверен, и из этого делался ряд выводов. Если бы при этом удалось прийти к противоречию, то пятый постулат был бы доказан. Наиболее далеко по этому пути продвинулись итальянский священник Джироламо Саккери (1667–1733) и швейцарский математик Иоган Генрих Ламберт (1728–1777). При этом было накоплено много фактов, которые имели бы место в геометрии, в которой верны все аксиомы евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельности, а последняя неверна. Особенно много удивительных теорем, которые были бы справедливы в такой геометрии, если бы она была возможна, получил Ламберт. Однако ни Саккери, ни Ламберт не допускали и мысли о том, что кроме геометрии Евклида возможна другая непротиворечивая геометрия. Все построения Саккери и Ламберта завершались тем, что явно или неявно использовалось утверждение, равносильное пятому постулату, в результате чего и обнаруживалось противоречие.

Лобачевский занялся исследованием той совокупности теорем, которая может быть выведена из системы аксиом, получаемой, если заменить аксиому параллельных евклидовой геометрии противоположным утверждением: *в плоскости через точку A, не принадлежащую прямой l, можно провести более одной прямой, не пересекающейся с l*. Созданная таким образом геометрическая система носит теперь имя неевклидовой геометрии или геометрии Лобачевского.

Независимо от Лобачевского существование такой системы установили Карл Фридрих Гаусс и венгерский математик Янош Бойяи. Однако Гаусс, боясь быть непонятым, не пошел дальше первых шагов в этой геометрии и не опубликовал ни одной строчки о своем открытии. Бойяи опубликовал результаты своих исследований в 1832 году в виде приложения к обширному геометрическому трактату своего отца. Эта работа по достоинству считается одним из замечательных произведений мировой математической литературы, однако и в ней развиты лишь первые понятия новой геометрии. Стоит отметить, что к открытию неевклидовой геометрии был близок немецкий ученый

Франц Адольф Тауринус. В 1826 году он даже опубликовал в Кельне небольшую брошюру, содержащую несколько теорем новой геометрии. К сожалению, изложены они были очень сжато и маловразумительно. Не встретив ни малейшего признания своих идей, Тауринус, по словам одного из своих современников, «впал в меланхолию»: в припадке болезни он сжег оставшиеся у него экземпляры брошюры и никогда более не возвращался к этому предмету.

Лобачевский впервые выступил с публичным изложением своей геометрии 23 февраля 1826 года. В этот день перед учеными физико-математического факультета стоял не просто уважаемый молодой профессор, а творец новой науки. Этот доклад был первым из серии докладов, сделанных им в том же 1826 году и опубликованных в первых номерах только что организованного научного журнала «Казанский вестник» в 1829 году под общим названием «О началах геометрии». В этом сочинении содержалось не только полное изложение новой геометрии, но и многочисленные применения ее в математическом анализе.

С периодом активной разработки новой геометрии совпало еще одно важное для Лобачевского событие. В 1827 году он был выбран ректором Казанского университета, и с этого времени в жизни университета наступила цветущая пора. Были построены новые университетские здания, астрономическая обсерватория, создана превосходная библиотека, многочисленные лаборатории, значительно увеличилось число студентов. Лобачевский избирался ректором шесть раз подряд и находился на этой должности 13 лет. В годы своего управления университетом Лобачевский создал все свои научные труды. Если даже отвлечься от их значения, если только учесть, сколько труда нужно было затратить на их написание (изданное в конце сороковых годов собрание сочинений Лобачевского составляет пять увесистых томов), на выполнение вычислений, на подготовку их к печати, то этой научной деятельности с лихвой хватило бы для всякого ученого. Но, кроме того, все эти годы Лобачевский интенсивно вел преподавание по нескольким кафедрам, проявляя недюжинную эрудицию и педагогическое мастерство. Одной только этой деятельности было бы вполне достаточно для любого незаурядного профессора, а Лобачевский совмещал ее с титанической административной работой. Достаточно сказать, что, занимаясь постройкой новых университетских зданий, он досконально изучил архитектуру и участвовал в проектировании университетского городка. И всегда он оставался человеком, преданным университету, чело-

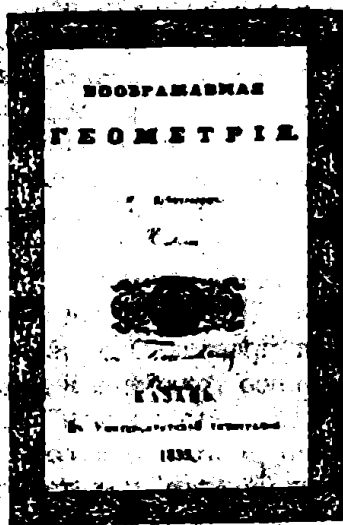
веком безукоризненной честности, уважающим мнения других, действующим лишь силой убеждения.

Созданную им новую геометрию Лобачевский назвал «воображаемой», говоря, что если она не существует в природе, то во всяком случае существует в математическом анализе. Как уже отмечалось, почти в полном объеме она была представлена на суд ученых в обширной работе «О началах геометрии». Первая реакция на это сочинение появилась в 1834 году. В журнале «Сын отечества» №47, издававшемся Н.Гречем и Ф.Булгариным, появился отзыв, подписанный литерами С.С.Доподлинно неизвестно, кто скрывался за этими литерами (по мнению крупнейшего знатока жизни и творчества Лобачевского профессора В.Ф.Кагана, это были петербургские математики С.Бурачек и С.Зеленый). И по существу, и по форме это был не отзыв, а грубый пасквиль, проникнутый неприкрытым издевательством. Это была не единственная отрицательная реакция. Даже такой крупный математик, как М.В.Остроградский, не скрывал насмешки, отзываясь о воображаемой геометрии.

Лобачевскому было суждено до дна испить горькую чашу непонимания и невежественной критики. Гениальное открытие Лобачевского было настолько революционным, что научная мысль была совершенно не подготовлена к его восприятию. Тяжелы были переживания ученого, на которого обрушилась

столь несправедливая критика, но неизмеримо сильнее было его убеждение в правильности своих идей. Твердость духа и уверенность в грядущем торжестве его открытия составляли, пожалуй, наиболее характерную черту Лобачевского.

В тридцатые годы Лобачевский значительно развивает основы новой геометрии, изложенные в его первой работе. Появляются новые обширные труды «Воображаемая геометрия» (1835), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835 — 1838). Однако, насколько можно судить, никто этих сочинений в то время не прочитал. В 1840 году Лобачевский



Титульный лист первого издания
«Воображаемой геометрии»

пишет на немецком языке небольшую книгу, содержащую короткое и, возможно, наиболее доступное изложение своей геометрии: «*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*» («Геометрические исследования по теории параллельных линий»). Она также получила неблагоприятный отзыв, но именно эта книга обратила на себя внимание Гаусса. Судя по всему, он был первым человеком, до конца осознавшим значение работ Лобачевского. Известно, что после прочтения «Исследований» шестидесятитрехлетний Гаусс два года изучал русский язык и освоил его в такой мере, что смог свободно прочесть остальные труды Лобачевского. Более того, по предложению Гаусса 23 ноября 1842 года Лобачевский был избран членом-корреспондентом Геттингенского королевского научного общества, уже тогда имевшего значение академии наук. Это было единственным научным признанием, которое Лобачевский получил при своей жизни. Однако в печати Гаусс о своем отношении к работам Лобачевского никогда не высказывался, так что диплом Геттингенского общества оставался лишь формальным знаком внимания. В письмах к своему другу Шумахеру Гаусс говорил о великом значении геометрии Лобачевского, но эта переписка была издана лишь в 60-х годах, после смерти Лобачевского, и только тогда на его работы обратили внимание математики Западной Европы.

В 1846 году сменилось руководство Казанским учебным округом, и Николай Иванович Лобачевский помимо своего желания был назначен помощником попечителя округа с увольнением от должностей профессора и ректора. По существу это была опала. Трудно сказать, чем было вызвано это назначение, но совершенно ясно, что прямой и самостоятельный Лобачевский оказался неуютен новым лицам в министерстве.

В конце своей жизни ему пришлось испытать массу огорчений, насмешек и несправедливостей. Силы угасали. С прекращением службы в университете значительно ухудшилось его материальное положение. Новый попечитель округа настоял, чтобы семья Лобачевского освободила казенную квартиру. Вскоре после этого заболел туберкулезом и скоропостижно умер его старший любимый сын Алексей. Лобачевский очень тяжело переживал эту утрату. И все же больной, подавленный грузом забот, ослепший — Лобачевский нашел силы подытожить результаты своих геометрических исследований в сочинении «Пангеометрия», которое он диктовал своим ученикам.

24 февраля 1856 года, ровно через тридцать лет после своего первоначального доклада по неевклидовой геометрии на физико-

математическом факультете, Лобачевский скончался непризнанным и почти забытым. Только в середине шестидесятых годов, после опубликования переписки Гаусса, работы Лобачевского сделались известными, и его замечательные идеи получили первое признание. Выходят в свет переводы его сочинений на французский, немецкий и итальянский языки, появляются первые последователи. Остается проблема логической непротиворечивости новой геометрии — центральный вопрос, на котором было сосредоточено внимание Лобачевского в течение всей его жизни. Наконец, в 1868 году итальянский математик Э. Бельтрами (1835—1900) находит положительное решение и этого вопроса, построив поверхность вращения, реализующую геометрию Лобачевского. С этого момента новая геометрия становится неотъемлемой частью математики, ее идеи и методы находят применение в теории чисел, теории функций, теории дифференциальных уравнений, в математической физике.

На основе идей Лобачевского выросла вся современная геометрия, играющая ключевую роль как в математике, так и вообще в точном естествознании. Имя творца этой новой геометрической системы — великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского — по праву занимает одно из первых мест в истории мировой науки.

С изобретением паровой машины и паровых насосов начала бурно развиваться теория *шарнирных механизмов* – систем, составленных из твердых звеньев, соединенных между собой шарнирами и предназначенных для преобразования движения одного или нескольких звеньев в требуемые движения других звеньев. Около ста лет развитие теории шарнирных механизмов определялось стремлением наиболее удовлетворительным образом решить задачу, с которой столкнулся английский механик Джеймс Уатт при усовершенствовании паровой машины.

Уатт задумал устроить паровую машину следующим образом (рис.1). В паровой цилиндр AB он поместил поршень, который двигался внутри цилиндра взад и вперед.

От поршня шел поршневый шток CD , проходящий сквозь крышку цилиндра. Так как поршневой шток составлял с цилиндром единое целое, то головка D поршневого штока совершала прямолинейное движение взад и вперед. На колонку HK при помощи шарнирного

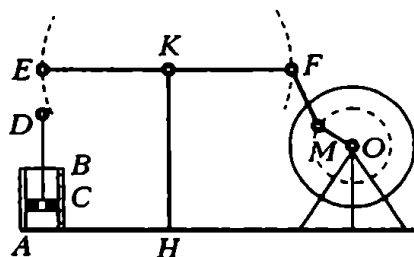


Рис. 1

соединения K было насажено коромысло EF , с которым посредством шарнира F был соединен шатун FM , соединенный, в свою очередь, шарниром M с кривошипом OM . На кривошип OM насаживался маховик.

Если бы можно было соединить головку D поршневого штока с коромыслом EF , то движение поршня преобразовывалось бы во вращение маховика. Но точка D совершает прямолинейное движение, а точка E описывает дугу окружности радиусом KE с центром в K . Следовательно, соединить точки D и E жестко нельзя: машина сломается.

Таким образом, возникла проблема: создать спрямляющий механизм, который вел бы точку D по прямой, а точку E – по дуге окружности. Уатт решил ее, придумав шарнирный механизм, который вел точку D по кривой, очень мало уклоняющейся от прямой.

Впоследствии многие ученые разрабатывали устройства, которые вели точку D с меньшим, чем в механизме Уатта, отклонением от прямой, и лишь в 60-е годы XIX столетия был изобретен способ точного ведения точки D по прямой.

Простой спрямляющий механизм Уатта

Уатт рассуждал следующим образом. Рассмотрим два коромысла AO и BO' , вращающихся вокруг неподвижных центров O и O' . Если шарнирно соединить концы A и B коромысел AO и BO' отрезком AB – Уатт называл его серьгой, – то какая-нибудь точка серьги будет совершать движение, мало уклоняющееся от прямолинейного (рис.2). Для определения наиболее подходящих для этой цели положений неподвижного центра O' и длины коромысла

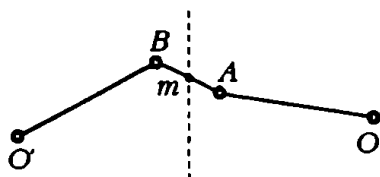


Рис.2

и BO' рассмотрим три положения коромысла OA (рис.3): среднее OA и два крайних OA' и OA'' и потребуем, чтобы при этих трех положениях коромысла точка m серьги находилась на некоторой прямой MN . За такую прямую Уатт принял перпендикуляр к среднему положению коромысла OA , проходящий через середину стрелки SA (стрелкой называется часть радиуса, перпендикулярного к хорде $A'A''$, заключенная между хордой и дугой).

Возьмем серьгу ab определенной длины и выберем на ней точку m (рис.4). Описав радиусом am дуги из точек A' , A и A'' , получим три положения точки m серьги на пересечениях m' , m и m'' этих дуг с прямой MN (см. рис.3). Продолжая прямые $A'm'$, Am и $A''m''$ и откладывая на их продолжениях отрезки, равные mb , мы получим три положения B' , B и B'' конца серьги, или, что

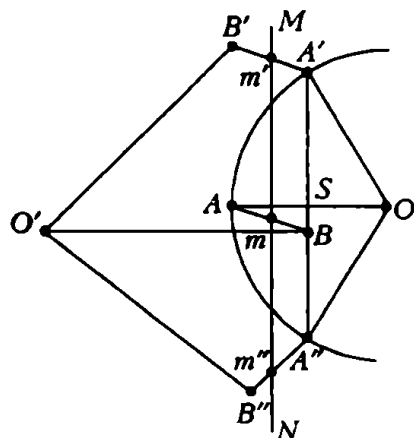


Рис.3

то же самое, конца коромысла BO' . Три точки полностью определяется проходящая через них окружность. Для определения центра

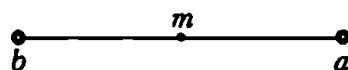


Рис. 4

O' этой окружности восставим к прямым $B'B$ и BB'' в их серединах перпендикуляры, на пересечении которых и будет лежать искомый центр O' . Раз известно положение центра O' , то определилась и длина коромысла BO' : она равна $BO' = B'O' = B''O'$.

Теперь, если мы соединим шарниром конец B серьги с концом B коромысла, насаженного на шарнир O' , то можем быть уверены, что при среднем и двух крайних положениях коромысла OA точка m серьги окажется на прямой MN .

Уатт надеялся, что при переходе от m' к m'' точка m серьги мало отклонится от прямой. Надежда эта оправдалась: оказалось, что траектория $m'm''$ точки m весьма хорошо приближается прямой. Можно показать, что точка m в механизме Уатта движется по кривой шестого порядка, имеющей вид удлинненной восьмерки (рис. 5), но часть $m'm''$ этой кривой очень мало отклоняется от прямой линии.

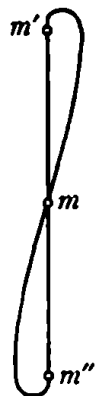


Рис. 5

Параллелограмм Уатта

В паровой машине Уатта приходилось вести по прямой линии не только головку штока, соединенного с поршнем парового цилиндра, но еще и головку штока, соединенного с поршнем насоса, который качает воду в холодильник (рис. 6). Поэтому Уатт изменил свой механизм так, что в нем оказались две точки, приблизительно направляемые по прямым. Для этого Уатт продолжил звено OA своего механизма (рис. 7) и построил параллелограмм $ABCD$.

Проводя через точки O и m прямую и обозначая через n точку пересечения этой прямой со зве-

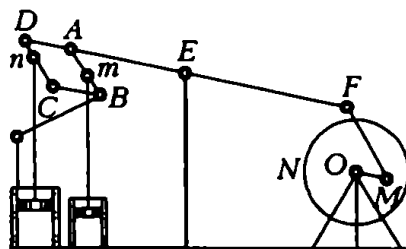


Рис. 6

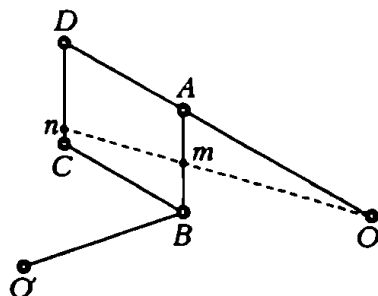


Рис. 7

ном CD , мы получим, что точка n звена CD будет описывать кривую, подобную той, которую описывает точка m . Следовательно, точка n также движется по линии, мало уклоняющейся от прямой. Так как высота парового цилиндра больше высоты насосного цилиндра и вследствие этого ход поршневого штока парового цилиндра больше хода поршневого штока насосного цилиндра, Уатт укрепил головку парового штока в точке n , имеющей большую амплитуду, головка же насосного штока была укреплена в точке m .

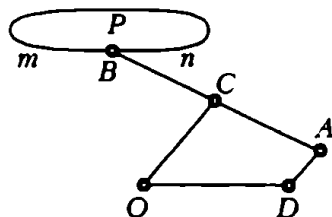
Общий вид паровой машины с параллелограммом Уатта изображен на рисунке 6. В таком виде она появилась в 1784 году.

Сам Уатт считал своим высшим научным достижением изобретение спрямляющих механизмов, а отнюдь не регулятор, который носит теперь его имя и является краеугольным камнем теории автоматического управления.

Спрямляющий механизм Чебышёва

Знаменитый русский математик и механик академик П. Чебышев изобрел несколько замечательных приближенных спрямляющих механизмов, которые он нашел с помощью созданной им теории функций, наименее уклоняющихся от нуля (1858 год). Не имея возможности сколь-нибудь подробно изложить эту теорию, мы опишем только устройство одного из наиболее практических механизмов Чебышева.

Этот механизм (рис.8) состоит из звена AB , в середине которого устроен шарнир C . На этот шарнир надето звено OC , равное $\frac{AB}{2}$, так что $OC = AC = BC$. Другой конец O звена OC укрепляется в неподвижном шарнире O . Точка A движется по дуге окружности с помощью третьего звена DA , укрепленного в неподвижном шарнире D . При выполнении следующих соотношений между размерами звеньев:



$$OD = \frac{OC + CA + AD}{3},$$

$$OC = AC = BC$$

Рис.8

точка B механизма Чебышева описывает кривую mPn , часть которой mn очень мало отличается от прямой. Чебышев показал, что наибольшее отклонение δ отрезка кривой mn от прямолинейного направления, параллельного

OD , вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4}{9}(r-a)(2r+a) + \frac{(4a-r)^3 r}{12(2r+a)^2}} - \sqrt{\frac{4}{9}(r-a)(2r+a)} \right),$$

где $r = AB$, $a = 2AD$. Это очень маленькая величина. Скажем, при $AC = OC = BC = 32$ дюйма (81,3 см), $OD = 25$ дюймов (63,5 см), $DA = 11$ дюймов (27,9 см), $\delta = 0,032$ дюйма (0,081 см).

Точные спрямляющие механизмы. Инверсия

Все описанные выше спрямляющие шарнирные механизмы были приближенными: прямая заменялась некоторой подходящей кривой. Теория точных спрямляющих механизмов основана на одном геометрическом преобразовании, имеющем большое значение в современной математике и физике – инверсии.

Пусть дана окружность с центром P и радиусом r (рис.9). Возьмем какую-нибудь точку M , для определенности – внешнюю по отношению к этой окружности. Из точки M проведем к данной окружности касательные MT_1 , MT_2 и построим точку пересечения M' хорды T_1T_2 с прямой PM . Из прямоугольного треугольника PMT_1 находим

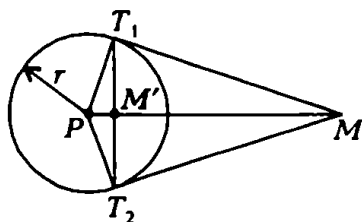


Рис.9

$$PM \cdot PM' = r^2. \quad (1)$$

Обратно, если дана точка M' , лежащая внутри окружности, то можно без труда построить внешнюю точку M .

Две точки M и M' , лежащие на одном луче, исходящем из центра P окружности радиусом r , называются взаимно обратными относительно этой окружности, если расстояния от них до центра удовлетворяют соотношению (1). Очевидно, что точка, обратная точке окружности, с ней совпадает и что центр окружности не имеет точки, ему обратной.

Соответствие между взаимно обратными точками или, иначе, преобразование, посредством которого из каждой точки M получается обратная ей точка M' , называется *инверсией* относительно данной окружности. Сама окружность называется *окружностью инверсии*, ее центр – *полюсом инверсии*, квадрат ее радиуса – *степенью инверсии*.

Из сказанного следует, что инверсия представляет собой взаимно однозначное (за исключением точки P) преобразование точек плоскости. Полюс инверсии обратной точки не имеет.

Соответствие между точками в инверсии взаимно: если точка M' соответствует точке M , то и точка M соответствует точке M' . Каждая точка окружности инверсии является неподвижной точкой.

Рассмотрим теперь важное для наших целей свойство инверсии.

Теорема 1. *Прямой линии, не проходящей через полюс инверсии, соответствует окружность, проходящая через полюс инверсии.*

Доказательство. Пусть A – проекция полюса инверсии на данную прямую (рис.10), B – произвольная точка данной прямой, A' и B' – точки, обратные точкам A и B . Из

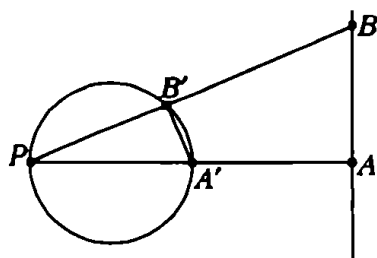


Рис. 10

определения инверсии следует, что $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$, или $PA : PB = PB' : PA'$. В силу этой пропорциональности треугольники PAB и $PB'A'$ подобны. Так как угол PAB прямой, то и угол $PB'A'$ прямой. Точка B' лежит на окружности, имеющей отрезок PA' своим диаметром, что и требовалось доказать.

В силу взаимности из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Окружность, проходящая через полюс инверсии, преобразуется в прямую, перпендикулярную прямой, соединяющей полюс инверсии с центром данной окружности.*

Следовательно, если бы нам удалось получить механизм, реализующий инверсию, то удалось бы преобразовывать движение по окружности в движение по прямой и обратно.

Механизмы, реализующие инверсию, называются *инверсорами*.

Инверсор Поселлье

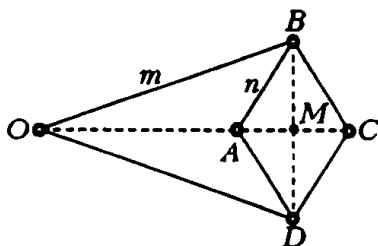


Рис. 11

В 1864 году французский инженер Поселлье сконструировал следующий инверсор. Четыре равных между собой прямолинейных звена соединяются шарнирами в ромб $ABCD$ (рис.11). От каких-либо двух противоположных вершин ромба проводятся два равных между собой звена BO и DO , причем

каждое из них длиннее стороны ромба. В точках B , D и O помещаются шарниры. Получившийся механизм и есть инверсор Поселлье.

Теорема 3. При любом положении инверсора Поселлье произведение расстояний AO и OC есть величина постоянная.

Доказательство. Обозначим длину каждого из длинных звеньев инверсора через m , так что

$$OB = OD = m.$$

Обозначим длину каждого из коротких звеньев через n , так что

$$AB = BC = CD = DA = n.$$

Проведем диагонали ромба. Одна из них пройдет через точку O , поскольку вершины равнобедренных треугольников DOB , DAB и DCB , имеющих общее основание BD , лежат на одной прямой. Положим $OA = r$, $OC = \rho$. Из треугольника OBM имеем

$$BM^2 = m^2 - OM^2. \quad (2)$$

Из треугольника BCM

$$BM^2 = n^2 - CM^2. \quad (3)$$

Вычитая (3) из (2), получаем

$$m^2 - n^2 = OM^2 - CM^2 = (OM + CM)(OM - CM) = OC \cdot OA,$$

или

$$\rho \cdot r = m^2 - n^2.$$

Итак, в инверсоре Поселлье произведение

$$\rho \cdot r = OC \cdot OA$$

остаётся постоянным при любых изменениях OC и OA , что и требовалось доказать.

Следовательно, если мы сделаем точку O такого инверсора неподвижной и будем двигать точку A по какой-либо кривой, то точка C опишет образ этой кривой при инверсии. В частности, если точка A движется по окружности, проходящей через полюс инверсии, то точка C будет двигаться по прямой. Отметим, что в 1872 году описанный выше инверсор независимо от Поселлье изобрел ученик Чебышева студент Петербургского университета Липкин.

Инверсор Гарта

Вскоре после появления инверсора Поселлье английский математик и механик Г. Гарт построил инверсор из антипараллель-

лограмма. Антипараллелограммом называется четырехугольник $ABCD$ (рис.12), в котором противоположные стороны равны и стороны AB и CD взаимно пере-

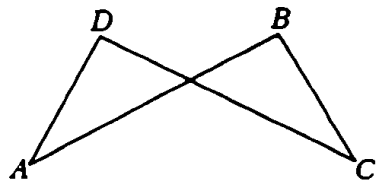


Рис.12

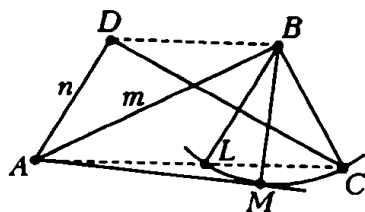


Рис.13

секаются. Тот факт, что шарнирный антипараллелограмм реализует инверсию, вытекает из следующих двух теорем.

Теорема 4. Произведение диагоналей DB и AC антипараллелограмма (рис.13) есть величина постоянная.

Доказательство. Условимся о следующих обозначениях:

$$AB = DC = m, AD = BC = n.$$

Проведем отрезок BL , параллельный AD , и опишем из точки B радиусом BL дугу. Эта дуга пройдет через точку C , поскольку

$$BL = DA = BC.$$

Проведем из точки A касательную AM к этой дуге. Квадрат касательной AM равен произведению секущей на ее внешний отрезок. Следовательно,

$$AM^2 = AL \cdot AC = DB \cdot AC. \quad (4)$$

Из треугольника ABM имеем

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = AB^2 - BC^2 = m^2 - n^2.$$

Сравнивая это равенство с (4), получаем

$$DB \cdot AC = m^2 - n^2 = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

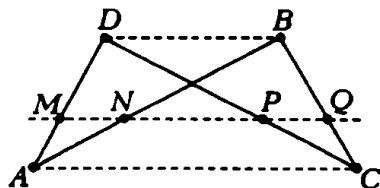


Рис.14

Теорема 5. Любые три из четырех точек пересечения сторон антипараллелограмма прямой, параллельной его диагонали, образуют на этой прямой два отрезка, произведение которых при всех положениях антипараллелограмма остается постоянным.

Доказательство. Проведем какую-либо прямую, пересекающую все стороны антипараллелограмма и параллельную его диагоналям (рис. 14). Получим четыре точки пересечения M, N, P, Q его сторон с этой прямой. Из подобия треугольников AMN и ADB вытекает, что

$$MN = BD \cdot \frac{AM}{AD}.$$

Из подобия треугольников ABC и NBQ имеем

$$NQ = AC \cdot \frac{BQ}{BC}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получим

$$MN \cdot NQ = BD \cdot AC \cdot \frac{AM}{AD} \cdot \frac{BQ}{BC}.$$

Но отношение $\frac{AM}{AD} \cdot \frac{BQ}{BC}$ постоянно, так как в него входят только постоянные величины. Произведение $BD \cdot AC$ постоянно согласно теореме 4. Следовательно,

$$MN \cdot NQ = \text{const}.$$

Точно таким же способом можно доказать, что

$$MP \cdot PQ = \text{const}.$$

Инверсор Гарта устроен следующим образом. Приняв какую-либо из этих четырех точек за центр инверсии, будем двигать вторую точку по окружности, проходящей через первую точку. Тогда третья точка вычертит прямую.

Уже в древности при решении задач, записываемых на современном языке квадратными уравнениями, математики столкнулись с ситуациями, в которых было необходимо извлекать корни из отрицательных чисел. В таких случаях считали задачу неразрешимой. Однако решение в радикалах кубического уравнения, найденное итальянскими математиками в первой половине шестнадцатого века, приводило к выражению *действительных* корней уравнения через квадратные корни из отрицательных чисел. Это заставило математиков оперировать новыми числами, применяя для них те же правила действий, которым подчиняются действительные числа.

Рассмотрим задачу извлечения квадратного корня из отрицательного числа $\sqrt{-a}$. Так как квадрат действительного числа всегда положителен, то такая задача в области действительных чисел невозможна. Нужны какие-то новые числа:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a} \cdot i,$$

где $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$ – обозначение нового, не действительного числа, называемого мнимой единицей.

Числа вида

$$a + bi,$$

где a и b – действительные числа, носят название *комплексных чисел*; число a называется *действительной частью*, а число b – *мнимой частью*. При $a = 0$ комплексное число обращается в *чисто мнимое число* bi ; при $b = 0$ получим число $a + 0i$, которое рассматривается как *действительное число* a .

Комплексные числа вида $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются *сопряженными*, комплексные числа вида $a + bi$ и $-a - bi$ называются *противоположными*. Множество комплексных чисел обычно обозначается через \mathbb{C} .

Условимся считать комплексные числа $a + bi$ и $c + di$ равными в том и только в том случае, когда $a = c$ и $b = d$.

Опубликовано в «Кванте» №7 за 1991 г.

Из этого определения вытекает, что комплексное число $a + bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b = 0$. В самом деле, действительное число 0 может быть представлено в виде комплексного числа как $0 + 0i$. На основании определения, равенство $a + bi = 0 + 0i$ будет иметь место только лишь при условии $a = 0$ и $b = 0$.

Заметим, что относительно комплексных чисел не принято соглашения, какое из них считать больше другого.

Упражнения

1. Найдите x и y , для которых

$$(2x + 3y) + (x - y)i = 2 + (2x + y)i.$$

2. Найдите комплексные числа противоположные и сопряженные с числами

а) $2 + i$; б) $1 + i$.

3. Какие комплексные числа совпадают со своими сопряженными? Противоположными?

Действия над комплексными числами

Условимся производить над комплексными числами алгебраические действия и преобразования по тем же правилам, по которым они производятся над действительными числами, принимая всегда, что $i^2 = -1$. Это соглашение служит основой для операций над комплексными числами. Чтобы выполнить какое-нибудь действие над комплексными числами вида $a + bi$, надо выполнить соответствующее действие над двучленами такого вида по правилам, которые существуют для многочленов с действительными коэффициентами, и затем в результате заменить i^2 на -1 .

Сложение

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Из этого правила легко усмотреть, что сложение комплексных чисел обладает теми же свойствами, которыми обладает сложение действительных чисел, т.е. переместительным и сочетательным свойствами.

Вычитание

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Отметим, что сумма или разность двух комплексных чисел может оказаться числом действительным; например, сумма сопряженных комплексных чисел $a + bi$ и $a - bi$ равна $2a$.

Умножение

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Подобным образом можно составить произведение трех и более комплексных чисел.

Заметим, что произведение двух сопряженных, не равных нулю, чисел $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ равно положительному действительному числу $a^2 + b^2$. В самом деле:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2i^2.$$

Но $i^2 = -1$, следовательно,

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Деление

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.\end{aligned}$$

Возведение в степень

Прежде всего, выясним, что происходит при возведении в степень мнимой единицы i с учетом условия $i^2 = -1$. Мы имеем:

$$i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = -i; i^4 = 1; i^5 = i^4 \cdot i = i; i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1; i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i; i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \dots$$

Таким образом, получаются четыре чередующихся значения:

$$i; -1; -i; +1.$$

Заметим еще, что число i^0 принимается равным 1.

Теперь нетрудно найти результат возведения в степень комплексного числа $a + bi$:

$$\begin{aligned}(a + bi)^2 &= a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi; \\ (a + bi)^3 &= a^3 + 3a^2(bi) + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = \\ &= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i.\end{aligned}$$

Упражнения

4. Выполните действия

а) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$; б) $\frac{2+i}{1+i} - \frac{2}{i}$;

в) $(1+i)^{100}$; г) $(1+i\sqrt{3})^9$;

д) $(1 + i \operatorname{tg} \alpha)^3$.

5. Найдите все комплексные числа z , для которых

а) $iz + 3 = 2i$; б) $\frac{z+1}{z-i} = \frac{3-i}{3+i}$;

в) $2z + i\bar{z} = 1 + 3i$.

Извлечение квадратного корня

Положим

$$\sqrt{a+bi} = x + yi.$$

Тогда

$$a + bi = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi,$$

т.е.

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b.$$

Следовательно, задача сводится к нахождению действительных решений этой системы. Возведя оба уравнения в квадрат, а затем сложив их, получим

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2; \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(берется только положительный корень, поскольку $x^2 + y^2 > 0$).
Теперь из уравнений

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad x^2 - y^2 = a$$

находим

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}, \quad y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}.$$

Для x и y имеем по два значения, что дает четыре комбинации $(x; y)$, однако из условия $xy = b/2$ вытекает, что знак y произведения xy должен совпадать со знаком числа b ; это дает только две пары значений $(x; y)$, т. е. два корня:

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right), \quad b > 0,$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right), \quad b < 0.$$

Упражнение 6. Вычислите

а) $\sqrt{1+i}$;

б) $\sqrt{3+4i}$;

в) $\sqrt{4-3i}$;

г) $\sqrt{\cos \alpha + i \sin \alpha} \quad (0 < \alpha < \pi)$;

д) $\sqrt{\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha}$.

Решение квадратного уравнения

Хорошо известно, что не любое квадратное уравнение может быть решено в действительных числах; условием разрешимости является неотрицательность его дискриминанта $D = b^2 - 4ac$. В комплексных числах это исключение исчезает. Если $D < 0$, то решения квадратного уравнения находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|} \cdot i}{2a}.$$

Иными словами, каковы бы ни были коэффициенты a , b и c квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

его решения находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Заметим также, что эта формула позволяет решать квадратные уравнения с комплексными коэффициентами a , b , c . Ведь мы уже умеем извлекать квадратные корни из любых комплексных чисел.

Упражнения

7. Решите квадратные уравнения

а) $x^2 + 2x + 2 = 0$; б) $x^2 + (1 - i)x + i = 0$;

в) $ix^2 - 2x + 1 = 0$.

8. Найдите все корни (комплексные) уравнений

а) $x^3 = 1$; б) $x^4 = -1$; в) $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Слово «комплексный» в переводе с латыни означает «составной», «сложный». Несмотря на то, что оперировать с комплексными числами ничуть не сложнее, чем с действительными, до начала девятнадцатого столетия комплексные числа рассматривались как очень сложный, темный, почти мистический объект. С упорством, достойным лучшего применения, велась длительная борьба между сторонниками и противниками «мнимых» чисел. Главное возражение противников заключалось в следующем: выражение вида $a + bi$ лишено смысла, поскольку i не является действительным числом, а значит, и вообще не является числом; поэтому i нельзя умножать на действительные числа.

Чтобы поставить теорию комплексных чисел на прочный фундамент, необходима была явная их конструкция, лучше всего – геометрическая. Желание иметь геометрическую реализацию множества комплексных чисел не случайно, если вспомнить, что и множество действительных чисел неотделимо для нас от «действительной прямой» с фиксированной на ней точкой, изображающей ноль, и с фиксированным масштабом, определяемым положением числа 1.

Впервые геометрическое изображение действий над комплексными числами было дано датским геодезистом К. Весселем в 1799 году и независимо от него французским математиком Ж. Арганом в 1806 году. Однако общее признание оно получило лишь в тридцатых годах прошлого столетия после работ немецкого математика Ф. Гаусса и английского математика У. Гамильтона. Идея геометрической интерпретации комплексных чисел заключается в том, что они изображаются не точками прямой, как действительные числа, а точками плоскости.

Итак, построим множество, элементы которого были бы точками плоскости, а сложение и умножение точек подчинялись бы всем правилам операций с действительными числами.

Выберем в плоскости прямоугольную систему координат с осью абсцисс x и осью ординат y . Обозначим через $(a; b)$ точку с абсциссой a и ординатой b . Для точек $(a; b)$ и $(c; d)$ определим сумму и произведение по правилам:

$$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d), \quad (1)$$

$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc). \quad (2)$$

Прямой проверкой без труда устанавливается, что операции сложения и умножения точек обладают переместительным и сочетательным свойствами:

$$(a; b) + (c; d) = (c; d) + (a; b),$$

$$((a; b) + (c; d)) + (e; f) = (a; b) + ((c; d) + (e; f)),$$

$$(a; b) \cdot (c; d) = (c; d) \cdot (a; b),$$

$$((a; b) \cdot (c; d)) \cdot (e; f) = (a; b) \cdot ((c; d) \cdot (e; f)).$$

Выполняется и распределительный закон:

$$((a; b) + (c; d)) \cdot (e; f) = (a; b) \cdot (e; f) + (c; d) \cdot (e; f).$$

Точка $(1; 0)$ служит единицей, т.е. для любой точки $(a; b)$

$$(a; b) \cdot (1; 0) = (1; 0) \cdot (a; b) = (a; b).$$

И наконец, для любой точки $(a; b) \neq (0; 0)$ существует единственная такая точка $(x; y)$, что

$$(a; b) \cdot (x; y) = (1; 0).$$

Докажем последнее свойство. Возьмем какую-нибудь ненулевую точку $(a; b)$ (это означает, в частности, что $a^2 + b^2 > 0$). Нам нужно найти такую точку $(x; y)$, чтобы $(a; b) \cdot (x; y) = (1; 0)$. Но

$$(a; b) \cdot (x; y) = (ax - by; ay + bx).$$

Следовательно, мы получаем систему уравнений

$$ax - by = 1, \quad ay - bx = 0.$$

Решая эту систему уравнений относительно x и y , найдем

$$x = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.$$

Этим все доказано.

Итак, мы превратили точки на плоскости в числовое множество, т. е. множество с операциями сложения и умножения, для которых верны все свойства сложения и умножения обычных действительных чисел. Действительные числа содержатся в этом множестве – это точки вида $(a; 0)$. В самом деле, сложить и перемножить такие точки – это попросту сложить и перемножить действительные числа:

$$(a; 0) + (c; 0) = (a + c; 0), \quad (a; 0) \cdot (c; 0) = (ac; 0).$$

А теперь возьмем точку $(0; 1)$. Посмотрим, что произойдет, если мы возведем ее в квадрат, т. е. умножим саму на себя:

$$(0; 1)^2 = (0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0).$$

Таким образом, $(0; 1)^2$ – это действительное число -1 . Значит, точку $(0; 1)$ можно интерпретировать как мнимую единицу i , срывая, тем самым, с нее мистический покров. И наконец, любую точку $(a; b)$ можно представить в виде

$$(a; b) = (a; 0) + (0; b) = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1).$$

Если $(a; 0)$ и $(b; 0)$ обозначить просто через a и b , а $(0; 1)$ – через i , то мы получим

$$(a; b) = a + bi,$$

т. е. теперь формальное выражение $a + bi$ стало на твердую основу – это всего-навсего точка с координатами $(a; b)$ на плоскости с заданными выше операциями сложения (1) и умножения (2).

Кроме чисто теоретической ценности, геометрическая реализация комплексных чисел имеет важное практическое значение – с ее помощью комплексные числа можно представить в так называемой тригонометрической форме, весьма удобной в многочисленных приложениях.

Упражнения

9. Изобразите точками на плоскости комплексные числа $2 + i$, $1 + i$, $-1 - i$, $-3 - 2i$.

10. Докажите, что сумма $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 изображается четвертой вершиной параллелограмма, двумя смежными сторонами которого являются отрезки, соединяющие точки z_1 и z_2 с точкой O .

11. Точки z_1 , z_2 , z_3 – вершины треугольника на плоскости. Найдите число, изображающее центр тяжести этого треугольника.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Рассмотрим на плоскости прямоугольную систему координат xOy . Пусть точка P изображает комплексное число $z = a + bi$ (рис.1).

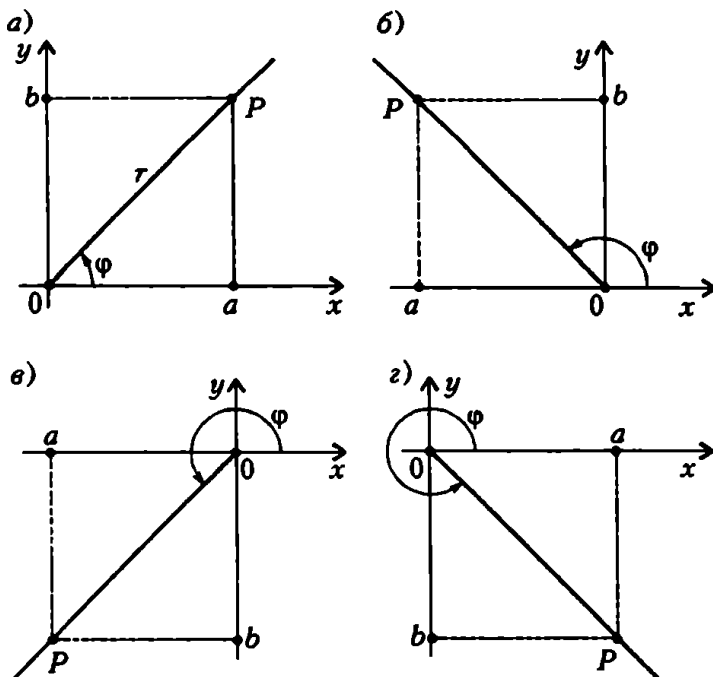


Рис. 1

Обозначим расстояние OP от точки P до начала координат через r , а через φ – угол (см. рис.1), образуемый лучом OP с положительным направлением оси Ox и отсчитываемый против часовой стрелки ($0 < \varphi < 2\pi$). (На рисунке 1 показаны углы φ для различных случаев расположения точки P .)

Из определения тригонометрических функций следует, что

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi,$$

т.е.

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Это и есть тригонометрическая форма комплексного числа. Величина $OP = r$ называется *модулем комплексного числа z* и обозначается через $|z|$, а величина угла φ – *главным аргументом числа z* и обозначается через $\arg z$.

Так как OP является гипотенузой прямоугольного треугольника OAP , то

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \text{при } b \geq 0; \\ 2\pi - \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \text{при } b < 0. \end{cases}$$

Из этих формул вытекает, что $|z|$ определен однозначно и равен нулю тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Главный аргумент при $z = 0$ не определен. Для $z \neq 0$ всякий угол, отличающийся от $\arg z$ на слагаемое, кратное 2π , называется *аргументом числа z* .

Например, так как $\arg i = \frac{\pi}{2}$, то все аргументы числа i имеют вид $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Аналогично, $\arg(-1) = \pi$, а все остальные аргументы – это числа $\pi(2k+1)$.

Упражнения

12. Найдите $|z|$ и $\arg z$, если а) $z = -2$; б) $z = 1$; в) $z = -1 - i$, г) $z = i$, д) $z = 1 - i\sqrt{3}$; е) $z = -3 - 4i$.

13. Запишите тригонометрическую форму чисел

а) 1; б) -1 ; в) $12 + 5i$; г) $12 - 5i$; д) $-12 - 5i$; е) $\sin \alpha + i \cos \alpha$ ($0 < \alpha < \pi$).

14. Докажите, что расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$.

Пользуясь этим, изобразите точки на плоскости, для которых

а) $|z - i| = 1$; б) $|z - 1| = |z + 1|$; в) $|z - i| = |iz - 1|$; г) $1 \leq |z - i| \leq 2$.

15. Изобразите точки плоскости, для которых

а) $\arg iz = \pi/4$; б) $\arg(iz - 1) = \pi/3$.

Все алгебраические действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме, совершаются по тем же правилам, что и с комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Складывать и вычитать комплексные числа проще и удобнее, когда они заданы в алгебраической форме, а умножать и делить – в тригонометрической форме.

Теорема 1. При умножении любого конечного количества комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Доказательство. Ограничимся двумя сомножителями; общий случай без труда получается индукцией. Итак, мы должны доказать, что

$$\begin{aligned} (r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)) \cdot (r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)) = \\ = (r_1 r_2) (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \quad (3)$$

Но

$$\begin{aligned} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned}$$

откуда непосредственно вытекает равенство (3). Так как из $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq 0$ следует, что $r_1 r_2 \geq 0$, то $r_1 r_2$ – модуль, а $\varphi_1 + \varphi_2$ – аргумент произведения двух данных чисел. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что произведение комплексного числа z на комплексное число a получается из точки z так: нужно повернуть луч Oz на угол $\alpha = \arg a$ против часовой стрелки и затем взять на полученном луче точку, удаленную от O на расстояние $|a| \cdot |z|$ (рис.2). Иначе говоря, преобразование плоскости, переводящее всякую точку z в точку az , есть произведение поворота на угол α и гомотетии с коэффициентом $|a|$ и центром O .

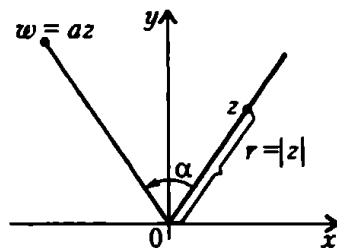


Рис.2

Упражнение 16. Докажите следующие равенства:

а) $|z|^2 = z \bar{z}$; б) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$;

в) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (выясните, при каких z_1 и z_2 будет равенство);

г) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

Каков геометрический смысл этого тождества?

Теорема 2. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Более подробно,

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Доказательство. Преобразуем дробь

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)},$$

умножив ее числитель и знаменатель на $\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2$. В результате получим

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}.$$

Поскольку $i^2 = -1$, знаменатель второй дроби равен $\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2 = 1$. Числитель же можно записать так:

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos (-\varphi_2) + i \sin (-\varphi_2)).$$

Применив правило умножения, получим

$$\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2),$$

что и требовалось доказать.

При совпадении сомножителей из теоремы 1 получается так называемая *формула Муавра*

$$(r_1 (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Теперь нетрудно решить вопрос об извлечении корня из комплексного числа.

Теорема 3. Пусть z – комплексное и n – натуральное числа. В множестве комплексных чисел выражение $\sqrt[n]{z}$ при $z = 0$ имеет единственное значение – 0, а при $z \neq 0$ – n различных значений. Если

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

то эти значения находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Доказательство. Поскольку $0^n = 0$ и из $z^n = 0$ следует, что $z = 0$, то $\sqrt[n]{0} = 0$.

Пусть теперь

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0.$$

Обозначив через ρ и α соответственно модуль и аргумент корня, будем иметь

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Отсюда по формуле Муавра $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$. Следовательно, должны выполняться соотношения

$$\rho^n = r, \quad n\alpha = \varphi + 2k\pi,$$

откуда

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

т.е.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (4)$$

Сколько различных значений мы получим? Легко убедиться, что пока мы будем подставлять в последнюю формулу значения $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, все получаемые значения корня будут различны, поскольку будут различны их аргументы. При $k = n$ получим

$$\frac{\varphi + 2\pi n}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi,$$

и корень будет равен

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \right) \right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right),$$

т.е. мы получим тот же корень, что и при $k = 0$. Аналогично, при $k = n + 1, n + 2$ и т.д. мы будем получать те же корни, что и при $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, целое число k в формуле (4) изменяется в пределах от 0 до $n - 1$. Теорема доказана.

Следствие. Корни n -й степени из единицы выражаются формулой

$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Они расположены в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

Упражнения

17. Вычислите корни и изобразите их на плоскости:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[3]{i}$; г) $\sqrt[3]{-i}$; д) $\sqrt[3]{3+4i}$.

18. Решите уравнения

а) $z^4 = z$; б) $(x+i)^4 + (x-i)^4 = 0$; в) $z^3 = -z$.

19. Докажите, что все корни n -й степени из единицы являются степенями числа $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Вычислите затем сумму k -х степеней всех корней n -й степени из единицы.

Алгебраическая замкнутость множества комплексных чисел

Мы построили совокупность комплексных чисел \mathbb{C} как расширение множества действительных чисел, в котором разрешимо любое квадратное уравнение. На первый взгляд может показаться, что для разрешимости уравнений более высоких степеней понадобится раз за разом расширять множество \mathbb{C} . Оказывается, что больше никаких расширений не нужно. Если мы возьмем уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (5)$$

какой угодно степени, в котором все коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ суть произвольные комплексные числа, то все его корни принадлежат множеству \mathbb{C} , и значит, для решения уравнения (5) никаких новых чисел, не входящих в \mathbb{C} , не требуется.

Это свойство называется алгебраической замкнутостью множества комплексных чисел. Впервые его сформулировал голландский математик Альберт Жирар еще в 1629 году, однако первое строгое доказательство было получено лишь в 1799 году Карлом Фридрихом Гауссом.

Упражнение 20*. Докажите, что если точки z_1, z_2, \dots, z_n являются вершинами выпуклого n -угольника, то все корни уравнения

$$\frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{z - z_n} = 0$$

лежат внутри или на границе этого многоугольника.

Античная математика оставила в наследство несколько великих сочинений. Одно из них – «Арифметика» Диофанта Александрийского. Удивительна судьба этой книги. Написанная в III веке н.э., она исчезла более чем на тысячелетие и считалась утраченной. Лишь в 1464 г. немецкий ученый Региомонтан случайно обнаружил 6 из 13 книг «Арифметики». В первый раз она была напечатана в латинском переводе в 1575 г. После ее издания 1621 г., подготовленного Баше де Мезириаком, она стала настольной книгой многих математиков, например, П. Ферма (1601–1665) и Р. Декарта (1596–1650).

За тысячелетие книга совсем не устарела – она сильно опережала уровень лучших алгебраических исследований XVI века. Посудите сами: в отличие от европейских алгебраистов этого времени, Диофант свободно оперировал отрицательными и рациональными числами, владел буквенной нотацией для уравнений, а самое главное – умел находить решение в целых и рациональных числах линейных, квадратных, кубических уравнений и систем с двумя и более неизвестными с целыми коэффициентами. Решение таких уравнений – они теперь называются *диофантовыми* – с тех пор находится в центре внимания математиков.

О решении некоторых диофантовых уравнений – по-моему, самых красивых – я и собираюсь рассказать вам. Для этого придется не только бросить пристальный взгляд на сочинения великого Диофанта, но и коснуться самых последних событий современной математической жизни.

Метод секущих Диофанта

Проиллюстрируем этот метод на конкретном примере – частном случае одного из тех, которые Диофант разбирает в своей «Арифметике». Пусть дано уравнение

$$x^2 - y^2 = 1 \tag{1}$$

Опубликовано в «Кванте» №7 за 1987 г.

и требуется найти все его рациональные решения, т.е. найти все пары

$$(x; y) = \left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d} \right), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

обращающие уравнение (1) в числовое тождество.

Уравнение (1), как и любое уравнение от переменных x, y , можно рассматривать как кривую на плоскости Oxy . В данном

случае это гипербола (рис.1). Сразу бросается в глаза решение $(1; 0)$ — точка пересечения P кривой с осью Ox . Проведем через эту точку секущую

$$y = k(x - 1) \quad (2)$$

и найдем ее вторую точку пересечения с кривой (1). Для этого подставим выражение (2) для y в уравнение (1) и решим получившееся квадратное уравнение отно-

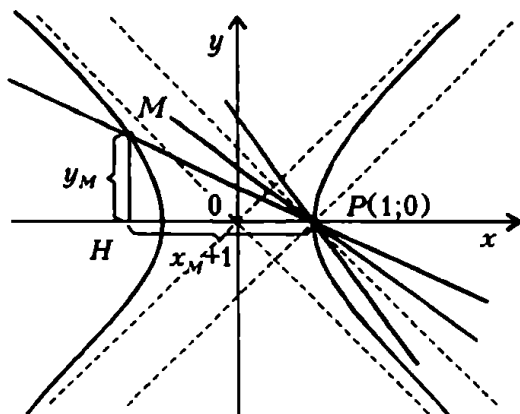


Рис. 1

сительно x . Получим

$$x_{1,2} = \frac{-k^2 \pm 1}{1 - k^2}.$$

Корень $x_1 = 1$ нам и так известен (он относится к точке $(1; 0)$), а второй корень $x_2 = (k^2 + 1)/(k^2 - 1)$ дает нам искомую вторую точку

$$(x_2; y_2) = \left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}; \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right). \quad (3)$$

Для любого рационального k ($k \neq \pm 1$) эта формула определяет точку на нашей кривой, а значит и рациональное решение данного уравнения. (При $k = \pm 1$ секущая пересекает кривую только в точке P — см. рис.1.) Обратно, для любого рационального решения, т.е. рациональной точки M на кривой, секущая PM задается уравнением (2) с рациональным k (ибо тогда катеты прямоугольного треугольника PMH рациональны).

Таким образом, формула (3) при всевозможных рациональных $k \neq \pm 1$ дает все решения в рациональных числах уравнения (1).

Сам Диофант, конечно, не вводил в рассмотрение систему координат Oxy , не рассматривал кривую данного уравнения – метод координат появился лишь в работах Декарта в XVII веке. Диофант делал подстановку (1) чисто алгебраически и получил – разумеется, в другой записи – формулу (3). Более того, он понимал, что продемонстрированный метод с успехом применим не только к многочлену $x^2 - y^2 - 1$, но и вообще к многочлену второй степени от двух переменных общего вида:

$$p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

где a, b, \dots, f – целые (или рациональные) числа, при условии, что у многочлена удалось найти хотя бы один рациональный корень.

Не на всякой кривой второй степени имеются рациональные точки; например, их нет на окружности $x^2 + y^2 = 3$ или на эллипсе $x^2 + 82y^2 = 3$.¹ Задача о существовании хотя бы одной рациональной точки на кривой второй степени оказалась очень трудной. Первые нетривиальные продвижения в ее решении получили индийские математики Брахмагупта (VII век) и Бхаскара (XII век), а окончательный ответ был найден лишь в 1768 г. французским математиком Ж.-Л. Лагранжем (1736–1813).

Диофант не ограничился уравнениями второй степени. Он с успехом берется и за третью степень, демонстрируя общий прием в одной конкретной задаче.

Одна задача «Арифметики» Диофанта. Касательная

В этой задаче требуется найти рациональное решение уравнения

$$y(6 - y) = x^3 - x. \quad (4)$$

Короткое решение, содержащее в зародыше замечательную идею, Диофант излагает с незаурядным мастерством. Попробуем, пишет он, замену $x = 2y - 1$ (разумеется, его обозначения совсем другие). Тогда получим

$$6y - 6y^2 = 8y^3 - 12y^2 + 4y.$$

Если бы 6 равнялось 4, как хорошо бы сократились члены с y в первой степени! Но число 4 взялось из двойки в замене $x = 2y - 1$. Так, заменим его тройкой, т. е. возьмем $x = 3y - 1$. Тогда

¹ Рациональные точки $(a/b; b/c)$ имеются, однако, на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Для таких точек тройка целых чисел (a, b, c) называется *пифагоровой* – она удовлетворяет соотношению $a^2 + b^2 = c^2$.

линейные члены сокращаются, и мы находим

$$y^2(9y - 7) = 0, \quad (5)$$

откуда $y = 7/9$ и $x = 16/9$. Получено рациональное решение $(16/9; 7/9)$ кубического уравнения (4).

На первый взгляд здесь нет ничего особенного – просто удачная замена $x = 2y - 1$ позволила найти решение. В чем же «глубокая идея»? Чтобы ответить на этот вопрос, вновь восполь-

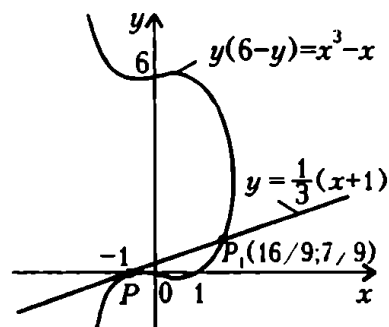


Рис. 2

зуемся методом координат и построим график кривой (4) – см. рисунок 2.² На этом рисунке показана прямая $x - 3y + 1 = 0$. Она касается нашей кривой в точке $P(-1; 0)$ (действительно, уравнение (5) имеет, кроме корня $y = 7/9$, еще и «два слившихся корня» $y^2 = 0$.)

По этому пути можно было бы пойти дальше: через полученную рациональную точку $(16/9; 7/9)$ построить еще одну касательную к кривой (4) до пересечения с ней в третьей рациональной точке и т.д. Но Диофант не сделал этого шага. И потребовалось более 1500 лет, прежде чем математики сумели до конца воспользоваться идеями Диофанта.

Кривые третьей степени

Оставаясь верными геометрическому подходу, рассмотренному выше, мы сосредоточим наше внимание не на решении уравнений третьей степени, а на следующем эквивалентном вопросе: каковы рациональные точки кривой на плоскости, задаваемой уравнением третьей степени

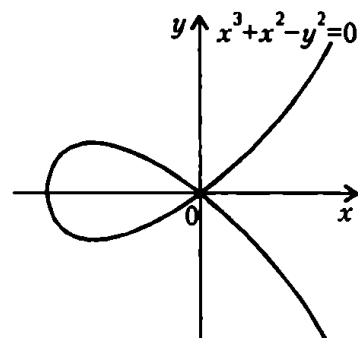


Рис. 3

каковы рациональные точки кривой на плоскости, задаваемой уравнением третьей степени

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2y + \dots + hx + iy + j = 0$$

с целочисленными коэффициентами?

Все такие кривые можно разбить на два больших класса. К первому

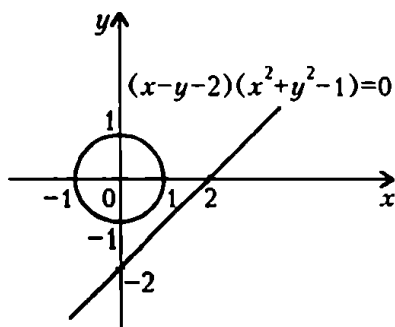
² О том, как строить графики подобных кривых, мы подробно расскажем ниже.

классу отнесем те кривые, у которых имеются точки заострения (как точка $(0; 0)$ кривой $y^2 = x^3$), самопересечения (рис.3), а также кривые, для которых $f(x, y)$ представляется в виде

$$f(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y),$$

где $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ – многочлены меньших степеней (рис.4). Назовем такие кривые *вырожденными*. Второй класс образуют невырожденные кривые третьей степени с целочисленными коэффициентами – такие кривые называются *эллиптическими*. Именно этот (наиболее общий) класс и будет нас интересовать. Мы будем рассматривать эллиптические кривые, заданные в так называемой *канонической форме*, т.е. уравнением

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (6) \quad \text{Рис.4}$$



с целыми коэффициентами a , b и c , в котором многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ не имеет кратных корней.

Это не нарушает общности: любую неособую кривую $f(x, y) = 0$ третьей степени можно некоторым преобразованием привести к виду (6); при этом, если коэффициенты $f(x, y)$ были целыми, задачу отыскания рациональных точек на кривой $f(x, y) = 0$ можно свести к аналогичной задаче для кривой (6) с целыми a , b и c .

Графическое изображение эллиптических кривых

Прежде всего выясним, как выглядит кривая (6). Чтобы получить ее графическое изображение, нужно нарисовать график функции $y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$ и симметрично отразить его на оси Ox . Для построения графика $y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$ построим вначале график функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Известно, что у многочлена третьей степени (без кратных корней) могут быть либо один, либо три вещественных корня. По предположению все эти корни различны. Поэтому график $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ выглядит так, как показано на рисунке 5, а и б. А теперь уже нетрудно получить график функции

$$y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$$

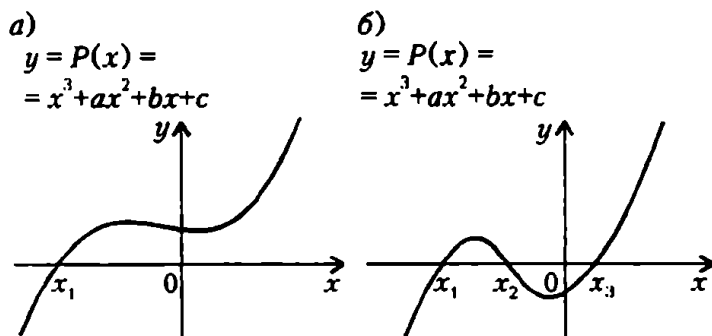


Рис.5

(рис.6,а) и, тем самым, вид эллиптической кривой $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ (рис.6,б) для случая кривой 5,а. Случай кривой 5,б мы оставляем читателю; результирующая кривая состоит из двух кусков (см. рис.9).

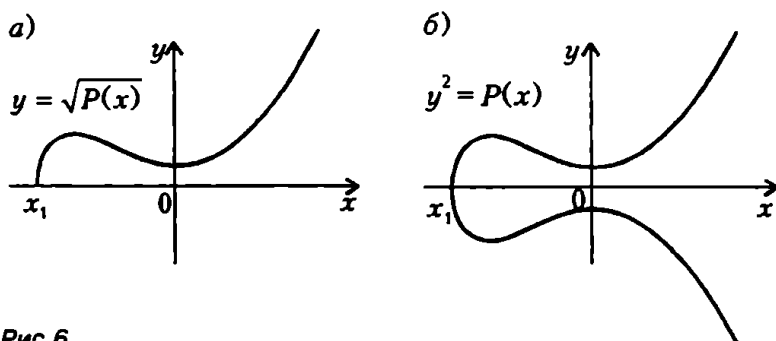


Рис.6

Отметим следующее обстоятельство. Графики функций $y = \sqrt{P(x)}$ и $y = -\sqrt{P(x)}$ «склеиваются» в точках x_1, x_2, x_3 «гладко», т.е. без углов. Это происходит потому, что касательная к графику $y = \sqrt{P(x)}$ в точках x_1, x_2, x_3 вертикальная; другими словами, ее угловой коэффициент обращается в бесконечность. Это легко доказать подсчетом производной функции $y = \sqrt{P(x)}$.

Сложение точек на эллиптической кривой

Метод секущих, примененный к эллиптической кривой C , приводит к неожиданному результату: оказывается, точки на ней можно «складывать». Мы определим операцию сложения точек на C , отправляясь от ее графического изображения (рис.7). Возьмем на C две точки P и Q и проведем через них прямую. Эта прямая имеет третью точку пересечения с кривой C . Отразим эту

точку от оси Ox и назовем получившуюся точку *суммой* P и Q (обозначение $P + Q$, см. рис.7). Не всегда прямая, проходящая через две точки, пересекает кривую C в третьей — например, вертикальная прямая. Далее мы более подробно рассмотрим эту ситуацию.

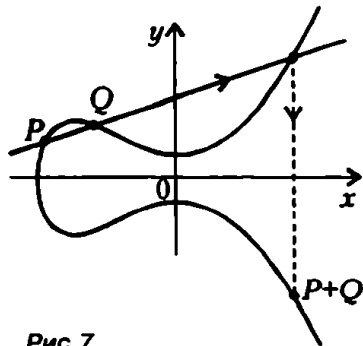


Рис.7

Иследуем свойства сложения точек на эллиптической кривой. За образец примем свойства операции сложения чисел. Эта операция *коммутативна*, т.е. $a + b = b + a$, и *ассоциативна*, т.е. $(a + b) + c = a + (b + c)$. Кроме того, у этой операции существует *нуль*, т.е. такое число 0 , что $a + 0 = a$ для любого a , и, наконец, для каждого числа a имеется противоположное ему, т.е. такое число $(-a)$, что $a + (-a) = 0$.

А как обстоит дело на эллиптической кривой? Прежде всего, *операция сложения точек коммутативна*. В самом деле, для вычисления $Q + P$ мы используем ту же самую прямую, что и для $P + Q$. Следовательно, $Q + P = P + Q$.

Ассоциативность для сложения точек на эллиптической кривой также выполняется, но доказать это непросто. Попробуйте самостоятельно смыслить этот замечательный факт геометрически, сделав чертеж.

Займемся теперь существованием нуля. Нуль — это такая точка E на кривой, что $P + E = P$. Как ее найти? Посмотрим на рисунок 8. Пусть на кривой дана точка P . Мы хотим найти что-то такое, что если провести прямую через P и это «что-то такое», пересечь получившуюся прямую с кривой, а потом отразить точку пересечения от оси Ox , то вновь получится P . Обозначим через R точку, симметричную P относительно оси Ox . Из сказанного вытекает, что прямая должна проходить через точки P и R , т.е. должна быть вертикальной. Следовательно, если имеется точка E , для которой $P + E = P$, то эта точка не может находиться в плоскости, поскольку она должна лежать и на кривой и на вертикальной прямой.

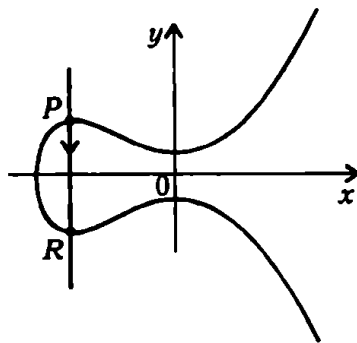


Рис.8

Раз точки E в плоскости нет, а она нам очень нужна, то мы добавим ее к плоскости и назовем *бесконечно удаленной точкой*.

Каким требованиям она должна удовлетворять? Любая вертикальная прямая стремится к бесконечности сверху и снизу. Потребуем, чтобы все эти бесконечности были одной и той же точкой E , т.е. будем считать, что E есть точка пересечения всех вертикалей. Это требование корректно определяет точку E – нулевую точку относительно нашей операции сложения. В силу нашего соглашения вертикальная прямая, проходящая через точку P , проходит через P и E . Поэтому точка R пересечения этой прямой с эллиптической кривой удовлетворяет соотношению

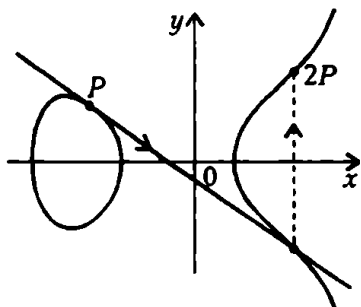


Рис.9

$P - R = E$, т.е. является противоположной к P . А с другой стороны, R – это точка, симметричная к P относительно оси Ox . Значит, любая точка P имеет противоположную $-P = R$. Тем самым мы убедились, что сложение точек на эллиптической кривой обладает теми же свойствами, что и сложение чисел.

Как вычислить точку $P + P$?

Когда точки были различны, мы проводили секущую. Раз они слились, понятно, что нужно провести касательную (рис.9).

А что делать, чтобы найти $3P$? Очень просто, берем сумму $2P$ и P . Подобно этому $4P = 3P + P$, $5P = 4P + P$ и т.д.

Поиск рациональных точек

Вооружившись операцией сложения, займемся теперь рациональными точками. Пусть $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ – две рациональные точки на эллиптической кривой $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, где a, b, c – целые числа, и прямая, проходящая через P и Q , пересекает эту кривую еще в одной точке $R = (x_3, y_3)$. Тогда R также является рациональной точкой.

Доказывается это утверждение довольно просто. Если

$$y = kx + d \quad (7)$$

– уравнение прямой, проходящей через точки P и Q , то k и d – рациональные числа, поскольку их можно выразить через координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) точек P и Q по формулам

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad d = y_1 - kx_1 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

Подставив (7) в уравнение эллиптической кривой, получим для x уравнение третьей степени с рациональными коэффициентами

$$(kx + d)^2 = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

т.е.

$$x^3 + (a - k^2)x^2 + (b - 2kd)x + c - d^2 = 0.$$

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 = k^2 - a.$$

Так как x_1 и x_2 рациональны, то рациональным будет x_3 , а значит, и $y_3 = kx_3 + d$.

Из этого доказательства сразу же следует формула для вычисления координат точки $P + Q$. По определению $P + Q$ получается из R отражением от оси Ox , значит, координаты (u, v) точки $P + Q$ могут быть найдены по формулам

$$u = k^2 - a - x_1 - x_2,$$

$$v = -ku - d = -[k(u - x_1) + y_1].$$

Подставив сюда значения k и d , получим

$$u = \frac{(y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} - (a_1 + x_1 + x_2), \quad v = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x_1 - u) - y_1. \quad (8)$$

Ясно, что если $x_1 = x_2$, эти формулы не имеют смысла. В этом случае уравнение секущей (7) нужно заменить уравнением касательной и действовать по прежней схеме. В результате получим

$$u = -2x_1 + a - \left(\frac{3x_1^2 + 2ax_1 + b}{2y_1} \right)^2,$$

$$v = y_1 + \frac{3x_1^2 + 2ax_1 + b}{2y_1}(u - x_1). \quad (9)$$

Таким образом, зная хотя бы одну рациональную точку P на эллиптической кривой, мы можем найти по указанным формулам точки $2P, 3P$ и т. д. Рассмотрим пример. Пусть кривая задана уравнением $y^2 = x^3 - 2$ и $P = (3; 5)$. Тогда $2P = \left(\frac{129}{100}; -\frac{383}{1000} \right)$ — новая рациональная точка. Теперь можно вычислить $3P, 4P$ и т.д. Заметим, что объем вычислений с каждым шагом стреми-

тельно растёт. Если обозначить через u_n первую координату точки nP , то

$$u_1 = 3, \quad u_2 = \frac{129}{100}, \quad u_3 = \frac{164323}{29241}, \quad u_4 = \frac{2340922881}{58675600},$$

$$u_5 = \frac{307326105747363}{160280942564521}.$$

Далее еще быстрее. Например, у u_{11} в числителе 71 знак.

В настоящее время неизвестно никакой общей процедуры для нахождения всех рациональных решений уравнения $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$. В разобранным примере $y^2 = x^3 - 2$ одно решение (3; 5) мы просто подобрали; в общем же случае не известно никакого метода, который позволил бы найти это первое решение. Нахождение рационального решения эллиптического уравнения с помощью эффективной процедуры является одной из крупнейших проблем теории чисел. Однако, если одно решение есть, можно найти другие по формулам (8) и (9).

Порядок точек на эллиптической кривой

При получении точек nP из данной точки P возможны два случая. В первом случае на шаге n получается нуль, т.е. существует такое число n , что $nP = E$. Если для всех $m < n$ $mP \neq E$, то говорят, что точка P имеет *конечный порядок* n . Например, на кривой $y^2 = x^3 + 4$ точка $P = (0; 2)$ имеет порядок 3, на кривой $y^2 = x^3 + 1$ точка $P = (2; 3)$ имеет порядок 6, на кривой $y^2 = x^3 - 43x + 166$ точка $P = (3; 8)$ имеет порядок 7. Можно поставить вопрос: сколько существует рациональных точек конечного порядка и каковы эти порядки?

В 1976 году американский математик Б.Мазур получил выдающийся результат, показав, что *если P — рациональная точка порядка n , то $n \leq 10$ или $n = 12$* ; с другой стороны, на эллиптической кривой *существует самое большее 16 рациональных точек конечного порядка*.

Второй случай — это когда все точки $2P$, $3P$, $4P$ и т.д. различны. В 1901 году французский математик А.Пуанкаре (1854–1912) высказал гипотезу о том, что *всегда можно найти такое конечное число рациональных точек P_1, \dots, P_r , что всякая рациональная точка P выражается через них, т.е. представляется в виде*

$$P = n_1P_1 + \dots + n_rP_r + Q,$$

где n_1, \dots, n_r – целые числа, однозначно определяемые точкой P , а Q – точка конечного порядка. Сами же точки P_1, \dots, P_r не выражаются друг через друга. Число r называется рангом кривой.

Гипотезу Пуанкаре в 1922 году доказал англичанин Л.Морделл, но его доказательство не дает никакого способа для вычисления ранга. До сих пор неясно, существуют ли эллиптические кривые сколь угодно большого ранга. Известно лишь, что ранг оценивается через коэффициенты a, b, c уравнения $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, поэтому кривые большого ранга должны иметь большие коэффициенты. Например, к числу кривых ранга $r \geq 8$ относится недавно найденная кривая, у которой

$$a = -3^2 \cdot 1487 \cdot 1873, \quad b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 151 \cdot 14551 \cdot 33353,$$

$$c = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 151^2 \cdot 193 \cdot 273 \cdot 156307.$$

Заключение: кривые произвольных степеней

Мы здесь ограничились кривыми (а значит, диофантовыми уравнениями) степеней 2 и 3. А как обстоит дело со степенями $n \geq 4$? В этом случае тоже естественно выделить класс «невырожденных» кривых степени n (типичный представитель – кривая $x^n + y^n = 1$). При $n > 3$ картина разительно меняется. Еще в 1931 году английский математик Л.Морделл выдвинул гипотезу – на таких кривых число рациональных точек всегда конечно. Гипотеза Морделла более полувека была в центре внимания ведущих математиков всего мира. Существенный вклад в ее решение внесли советские математики И.Р.Шафаревич, Ю.И.Манин, С.Ю.Аракелов, А.Н.Паршин, Ю.Г.Зархин, но честь ее решения в 1983 г. выпала молодому ученому из ФРГ Герду Фальтингсу. За это в 1986 г. на Конгрессе математиков в Беркли (США) он был награжден медалью Филдса – высшей наградой для математиков.

Как сделать из точек числа?

Если речь идет о точках на прямой – это просто. Выбрав начало отсчета («ноль») и масштаб с направлением («единицу»), можно получить из прямой числовую ось и тем самым превратить каждую точку в действительное число – ее координату (рис.1).

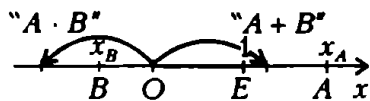


Рис. 1

С точками на плоскости сложнее. Выбрав начало отсчета («ноль») и пару перпендикулярных осей, можно сопоставить каждой точке на плоскости пару ее координат $(x; y)$. Чтобы каждую такую пару – *дуплет* – сделать числом, нужно научиться «складывать» и «умножать» эти дуплеты, причем так, чтобы сохранялись привычные свойства сложения и умножения (переместительный, сочетательный и распределительный законы, наличие обратных операций – деления и вычитания).

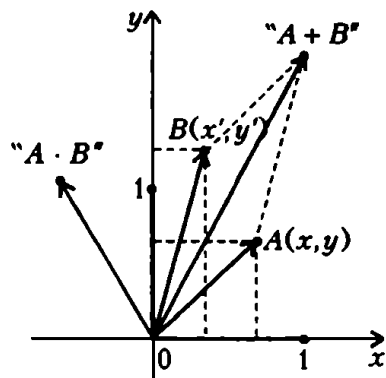


Рис. 2

Со сложением просто. Дуплеты естественно складывать как векторы – по координатам (рис.2):

$$(x; y) + (x'; y') = (x + x'; y + y'). \quad (1)$$

С умножением же дело обстоит хитрее¹. Однако и здесь не очень сложная формула дает выход из

Статья написана в соавторстве с А.С.Мищенко. Опубликовано в «Кванте» №9 за 1983 г.

¹ Покоординатное умножение $(x; y)(x'; y') = (xx'; yy')$ ничего хорошего не дает: для такой операции нет обратной операции (невозможно, к примеру, деление на ненулевой дуплет $(0; 2)$).

положения:

$$(x; y) \cdot (x'; y') = (xx' - yy'; xy' + x'y). \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что такое умножение дуплетов вместе со сложением (1) обладают выше упомянутыми «привычными свойствами». Таким образом, множество дуплетов с операциями (1), (2) можно считать полноценным числовым множеством.

На самом деле дуплеты – не что иное, как комплексные числа. Их чаще записывают не в виде $(x; y)$, а как $x + yi$, где i – мнимая единица (дуплет $(0; 1)$), обладающая замечательным свойством $i^2 = i \cdot i = -1$, позволяющим (в области комплексных чисел) извлекать корни из отрицательных чисел.

А как превратить точки пространства в числа? Здесь снова, вводя систему координат, можно записывать точки в виде наборов их координат, но уже не двух, а трех: $(x; y; z)$. Такие тройки, или *триплеты*, естественно складывать покоординатно:

$$(x; y; z) + (x'; y'; z') = (x + x'; y + y'; z + z'). \quad (3)$$

Триплеты можно будет считать числами, если найдется способ их умножения, обладающий, вместе со сложением (3), обычными свойствами этих операций. В частности, обратной к умножению операцией (делением на ненулевые элементы).

Так все-таки, как умножаются триплеты? В 1833 г. этой задачей заинтересовался ирландский математик Уильям Роуан Гамильтон (1805–1865). Но об этом незаурядном человеке стоит рассказать особо.

У.Р.Гамильтон

Гамильтон обладал блестящими и многосторонними способностями. В десять лет он знал наизусть много стихов Гомера, в четырнадцать лет владел девятью языками, в 1824 г. опубликовал в трудах Королевской Ирландской Академии работу, посвященную геометрической оптике, в 1827 г. получил звание королевского астронома Ирландии.

К 1833 г. Гамильтон занимал пост директора обсерватории в Денсинке (около Дублина) и был известен как автор ряда работ по оптике и аналитической механике. Исходя из своих работ по геометрической оптике, Гамильтон предсказал эффект двойной конической рефракции в двуосных кристаллах, который вскоре был обнаружен его коллегой Ллойдом.

В течение долгих десяти лет Гамильтон безуспешно пытался придумать правило умножения триплетов. Позже в письме к сыну он вспоминал: «Каждое утро..., когда я спускался к

завтраку, ты и твой брат Уильям Эдвин обычно спрашивали меня: «Ну как, папа, ты уже умножаешь триплеты?» На что я всегда был вынужден печально отвечать: «Нет, я умею лишь складывать и вычитать их».

Векторное произведение

Задача, которую решал Гамильтон, поначалу казалась не-сложной. Как складывать векторы – ясно (по формуле (3)), остается «только» найти формулу их умножения – что-нибудь вроде формулы (2) для умножения дуплетов. Но все формулы, которые перепробовал Гамильтон, упорно не подходили – то

нарушалось одно из обычных свойств, то другое.

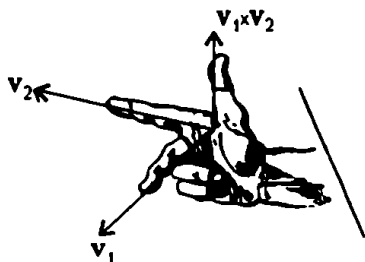


Рис.3

Уже тогда была хорошо известна операция векторного произведения: *векторным произведением* $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ ненулевых векторов \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 называется вектор, перпендикулярный плоскости, проходящей через векторы \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 и имеющий направление, оп-

ределяемое «правилом правой руки» (рис.3), и длину $|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \sin(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$. Для дальнейшего заметим, что если векторы \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 заданы своими координатами в прямоугольной системе координат:

$$\mathbf{v}_1 = (\alpha_1; \beta_1; \gamma_1),$$

$$\mathbf{v}_2 = (\alpha_2; \beta_2; \gamma_2),$$

то

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1; \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1; \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1). \quad (4)$$

Но операция векторного произведения не годилась Гамильтону, поскольку она не имеет обратной. Например, если $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$, то угол $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ между этими векторами равен нулю. Значит, длина векторного произведения $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ равна нулю, т.е. и сам вектор \mathbf{v}_3 нулевой. Если бы операция деления на ненулевой вектор существовала всегда, то мы имели бы $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) : \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, в то время как $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ и, значит, $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) : \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Получившееся противоречие показывает, что деление на \mathbf{v}_2 невозможно.

Не может не вызвать уважения и восхищения то, что, несмотря на разочарование и неудачи, Гамильтон не оставлял

надежды и в течение десяти лет с завидным упорством пытался решить поставленную перед собой задачу. И хотя задача так и не была решена (и не могла быть решена – почему, мы объясним позже), десятилетний труд не пропал даром. В один прекрасный день 1843 года Гамильтон вдруг решил для определения умножения рассматривать не триплеты (тройки чисел), а четверки, или, как он их тут же окрестил, кватернионы. Вот как это произошло.

Случай на Брогемском мосту

В одном из писем к своему сыну, написанном в свойственном тому времени несколько высокопарном стиле, Гамильтон вспоминал: «Это был 16-й день октября, который случился в понедельник, в день заседания Совета Королевской Ирландской Академии, где я должен был председательствовать. Я направлялся туда с твоей матерью вдоль Королевского канала; и, хотя она говорила мне какие-то отдельные фразы, я их почти не воспринимал, так как в моем сознании подспудно что-то творилось. Неожиданно как будто бы замкнулся электрический контур; блеснула искра, предвещающая многие длинные годы определенно направленной мысли и труда, моего – если доведется, или труда других, если мне будет даровано достаточно сознательной жизни, чтобы сообщить о своем открытии. Я оказался не в состоянии удержаться от желания высечь ножом на мягком камне Брогемского моста фундаментальную формулу о символах i , j , k ,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

содержащую решение проблемы, но, конечно, эта запись с тех пор стерлась. Однако более прочное упоминание осталось в Книге записей Совета Академии за этот день, где засвидетельствовано, что я попросил и получил разрешение на доклад о кватернионах на первом заседании сессии, который и был прочитан соответственно в понедельник 13-го следующего месяца – ноября».

Определение кватернионов

Кватернионы – это четверки действительных чисел (x ; y ; u ; v), которые удобно записывать в виде

$$q = x + yi + uj + vk,$$

где i , j , k – новые числа, являющиеся аналогом мнимой единицы в комплексных числах. Требуется, чтобы числа i , j , k удовлетво-

ржали следующим соотношениям:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad (5)$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad (6)$$

x	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

которые удобно записать в виде «таблицы умножения» (рис.4).

По определению операции сложения и умножения кватернионов производятся по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов с учетом правил (5)–(6).

Согласно этому определению, если q_1 и q_2 – два кватерниона, то

Рис.4

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (x_1 + y_1i + u_1j + v_1k) + (x_2 + y_2i + u_2j + v_2k) = \\ &= x_1 + y_1i + u_1j + v_1k + x_2 + y_2i + u_2j + v_2k = \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1i + y_2i) + (u_1j + u_2j) + (v_1k + v_2k) = \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i + (u_1 + u_2)j + (v_1 + v_2)k. \quad (7) \end{aligned}$$

Это, разумеется, привычное нам «покоординатное» сложение. Далее, произведение кватернионов q_1 и q_2 вычисляется так:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (x_1 + y_1i + u_1j + v_1k)(x_2 + y_2i + u_2j + v_2k) = \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + x_1u_2j + x_1v_2k + y_1x_2i + y_1y_2i^2 + y_1u_2ij + y_1v_2ik + \\ &+ u_1x_2j + u_1y_2ji + u_1u_2j^2 + u_1v_2jk + v_1x_2k + v_1y_2ki + v_1u_2kj + v_1v_2k^2 = \\ &= x_1x_2 + x_1y_2i + x_1u_2j + x_1v_2k + y_1x_2i - y_1y_2 + y_1u_2k - y_1v_2j + u_1x_2j - \\ &- u_1y_2k - u_1u_2 + u_1v_2i + v_1x_2k + v_1y_2j - v_1u_2i - v_1v_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2 - u_1u_2 - v_1v_2) + (x_1y_2 + y_1x_2 + u_1v_2 - v_1u_2)i + \\ &+ (x_1u_2 + u_1x_2 - y_1v_2 + v_1y_2)j + (x_1v_2 + v_1x_2 + y_1u_2 - u_1y_2)k. \quad (8) \end{aligned}$$

Длинная, но совершенно автоматическая проверка показывает, что умножение кватернионов обладает сочетательным свойством:

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3).$$

Естественно считать, что действительные и комплексные числа являются частным случаем кватернионов. Так, действительное

число x – это кватернион вида

$$x = x + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k.$$

Комплексное число $z = x + iy$ представляется как кватернион

$$z = x + iy + 0 \cdot j + 0 \cdot k. \quad (9)$$

Читатель, не знакомый с комплексными числами, не должен смущаться: он может считать формулу (9), вместе с формулами (7) и (8), определением комплексного числа. Ему также будет полезно написать формулу умножения (8) для случая (9) и сравнить с формулой (2).

У операции сложения кватернионов, очевидно, имеется обратная операция – вычитание. Именно, разность двух кватернионов q_1 и q_2 определяется формулой

$$q_1 - q_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i + (u_1 - u_2)j + (v_1 - v_2)k.$$

Если $q_1 = q_2$ то разность $q_1 - q_2$ – это нулевой кватернион, равный

$$q_1 - q_2 = 0 + 0 \cdot i + 0 \cdot j + 0 \cdot k = 0.$$

Деление кватернионов

Перейдем теперь к операции деления кватернионов, обратной к операции умножения. Вообще, что мы понимаем под частным от деления числа a на число $b \neq 0$? Это такое число c , что

$$bc = a. \quad (10)$$

Так определяется частное от деления для действительных и комплексных чисел. К сожалению, для кватерниона применить непосредственно это определение мы не можем. И дело здесь вот в чем. Для того чтобы формула (10) «корректно» определяла частное, нужно, чтобы произведение не зависело от порядка сомножителей. В противном случае наряду с частным $c = b^{-1}a$, определенным формулой (10), существует вполне равноправное «левое» частное c' , определяемое формулой

$$c'b = a,$$

которое может отличаться от «правого частного» c из (10). Вот здесь, кроме необходимости выйти за пределы трехмерного пространства, Гамильтону пришлось принести еще одну жертву.

Оказывается, определенные им новые числа – кватернионы – потеряли еще одно привычное качество: произведение кватернионов зависит от порядка сомножителей. Действительно, уже в

формулах (6) при изменении порядка множителей произведение меняет знак.

Таким образом, можно говорить лишь о «делении слева» и «делении справа». Как реально найти, скажем, «левое частное» от деления кватерниона q_1 на кватернион $q_2 \neq 0$?

Обозначим искомое частное через $q = x + yi + uj + vk$. Тогда, используя правило умножения для кватернионов и определение левого частного, получим следующее равенство кватернионов:

$$qq_2 = q_1,$$

или

$$\begin{aligned} (xx_2 - yy_2 - uu_2 - vv_2) + (xy_2 + yx_2 + uv_2 - vu_2)i + \\ + (xu_2 + ux_2 - yv_2 - vy_2)j + \\ + (xv_2 + vx_2 + yu_2 - uy_2)k = x_1 + y_1i + u_1j + v_1k. \end{aligned}$$

Полученное равенство равносильно системе четырех линейных уравнений с переменными x, y, u, v :

$$\begin{aligned} x_2x - y_2y - u_2u - v_2v &= x_1, \\ y_2x + x_2y + v_2u - u_2v &= y_1, \\ u_2x - v_2y + x_2u - y_2v &= u_1, \\ v_2x + u_2y - y_2u + x_2v &= v_1. \end{aligned}$$

Предлагаем читателю в качестве упражнения решить эту систему и тем самым найти «левое частное» от деления q_1 на q_2 . Аналогичным образом находится «правое частное» от деления q_1 на q_2 .

Рассмотрим частный случай, когда делимое q_1 равно действительному числу 1. В этом случае частное от деления $q_1 = 1$ на кватернион q_2 (и «слева», и «справа») равно одному и тому же кватерниону

$$p = \frac{x_2 - y_2i - u_2j - v_2k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}$$

(докажите!). Поэтому кватернион p обозначается через

$$q^{-1} = \frac{x_2 - y_2i - u_2j - v_2k}{x_2^2 + y_2^2 + u_2^2 + v_2^2}.$$

Тогда «правое частное» от деления кватерниона q_1 на ненулевой кватернион q_2 выражается формулой

$$q = q_2^{-1} \cdot q_1,$$

а «левое частное» от деления кватерниона q_1 на q_2 – формулой

$$q = q_1 \cdot q_2^{-1}.$$

Практически частное от деления двух кватернионов ищется другим путем. Для этого нам потребуются

Скалярные и векторные кватернионы

Так же как комплексные числа разлагаются в сумму своей действительной и мнимой частей, кватернион

$$q = x + yi + uj + vk$$

тоже можно разложить в сумму

$$q = x + (yi + uj + vk).$$

Первое слагаемое в этом разложении называется *скалярной частью* кватерниона, а второе слагаемое – *векторной частью*. Скалярная часть x – это просто действительное число, а векторная часть $yi + uj + vk$ может быть изображена вектором

$$r = yi + uj + vk$$

в трехмерном пространстве, где i, j, k мы теперь рассматриваем как единичные векторы прямоугольной системы координат (рис.5).

Таким образом, каждый кватернион q представляется в виде суммы

$$q = x + r,$$

где x – скалярная часть кватерниона q , а r – векторная часть. Если $r = 0$, то $q = x$ и кватернион q называется *скалярным кватернионом*. Если же $x = 0$, то $q = r$ и q называется *векторным кватернионом*.

При сложении кватернионов независимо складываются их скалярные и векторные части.

При умножении кватернионов дело обстоит сложнее. Если q_1 и q_2 – скалярные кватернионы, то их произведение $q_1 q_2$ тоже скалярный кватернион. В случае, когда $q_1 = x$ – скалярный кватернион, а $q_2 = r$ – векторный кватернион, произведение

$$q_1 q_2 = x \cdot (yi + uj + vk) = (xy)i + (xu)j + (xv)k$$

является векторным кватернионом и операция умножения совпа-

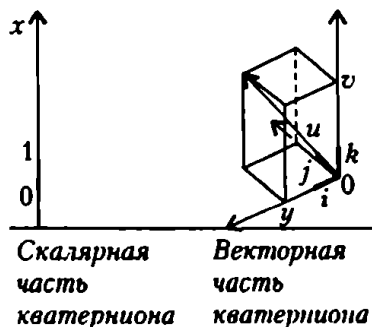


Рис.5

дает с умножением вектора r в пространстве на действительное число x .

И наконец, если оба кватерниона векторные:

$$\begin{aligned}q_1 &= r_1 = y_1 i + u_1 j + v_1 k, \\q_2 &= r_2 = y_2 i + u_2 j + v_2 k,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}q_1 q_2 &= -(y_1 y_2 + u_1 u_2 + v_1 v_2) + (u_1 v_2 - v_1 u_2) i + \\&\quad + (v_1 y_2 - y_1 v_2) j + (y_1 u_2 - u_1 y_2) k.\end{aligned}$$

Как видно из последней формулы, скалярная часть произведения $q_1 q_2$ равна скалярному произведению (r_1, r_2) векторов r_1 и r_2 с обратным знаком. Векторная же часть $q_1 q_2$ — это наш старый знакомый — векторное произведение $r_1 \times r_2$, записанное в координатах (см. (4)).

Объединяя все рассмотренные случаи, получим общую формулу для умножения кватернионов. Если $q_1 = x_1 + r_1$ и $q_2 = x_2 + r_2$, то

$$q_1 q_2 = (x_1 x_2 - r_1 \cdot r_2) + (x_1 r_2 + x_2 r_1 + r_1 \times r_2).$$

А как же триплеты?

Почему Гамильтону все-таки не удалось найти удовлетворительного способа для умножения триплетов? Не из-за недостаточного остроумия или трудолюбия — выше мы уже отмечали, что задачу построения «трехмерных чисел» решить нельзя. Действительно, доказано, что попросту не существует способа умножения точек пространства, удовлетворяющего нашим требованиям (ассоциативности, дистрибутивности относительно покомпонентного сложения, возможности деления на ненулевые элементы). Более того, сейчас известны все случаи, когда можно ввести такое умножение. Как доказал немецкий математик Ф.Г. Фробениус (1849–1917), этих случаев три: в размерности один (обычные действительные числа), в размерности два (комплексные числа) и в «размерности четыре» (кватернионы).

Что было дальше

Гамильтон и его последователи возлагали большие надежды на кватернионы. От кватернионов ожидали таких же результатов, как от комплексных чисел, и даже больше. И действительно, с помощью исчисления кватернионов были обнаружены совершенные в их математической красоте формулы, описывающие

ряд важных физических явлений. Но дальнейшие надежды на развитие алгебраического и функционального исчисления кватернионов не оправдались.

Для кватернионов не имеет места основная теорема алгебры о существовании корней у многочлена с кватернионными коэффициентами, а, с другой стороны, существует такой многочлен с кватернионными коэффициентами от одной переменной, для которого любой кватернион является корнем.

Оптимизм сменился скепсисом. В начале нашего века математики перестали интересоваться кватернионами. Но время шло, и физики упорно искали математический формализм для некоторых эффектов, связанных с так называемым *спином* элементарных частиц. Кватернионы снова получили признание, когда была понята их роль в построении различных геометрических преобразований пространства, используемых в квантовой физике.

...Да Лебедь рвется в облака, Рак пятится назад, а Щука тянет в воду.

Вы, конечно, помните вынесенные в эпиграф строчки замечательной басни И.А.Крылова. А задумывались ли вы над тем, как рассчитать движение воза, если известно, с какими силами его тащат лебедь, рак и щука? Задача эта совершенно естественная, можно сказать, типичная: к некоторому твердому массивному телу в определенных местах приложены силы – что произойдет? Как ни странно, привычный векторный аппарат, изучаемый в школе на уроках физики и математики, совсем непригоден для решения подобных задач. Когда мы должны принимать в расчет не только массу, но и размеры тела, когда мы имеем дело не с абстрактной материальной точкой, а с настоящим предметом, то не всегда ясно, как складывать векторы, приложенные к предмету в разных местах, что можно и чего нельзя делать с этими векторами и, собственно говоря, что представляют собой такие «настоящие» векторы.

Ответ на эти вопросы – в виде небольшой математической теории (*теории скользящих векторов*) – и составляет предмет нашей статьи.

Какие бывают векторы?

Вектор в пространстве или на плоскости принято изображать направленным отрезком \overline{AB} . Он задается двумя точками: своим *началом* (или *точкой приложения*) A и *концом* B . Если отрезок AB неограниченно продолжить в обе стороны, получится прямая, которая называется *линией действия* вектора AB .

Все векторы, в зависимости от того, какие геометрические или физические величины они представляют, могут быть разбиты на три следующих типа.

Статья написана в соавторстве с А.Б.Сосинским. Опубликовано в «Кванте» №8 за 1985 г.

1°. Может случиться, что два *геометрически равных* вектора изображают одну и ту же физическую или механическую величину. (Напомним, что в геометрии два вектора (направленных отрезка) называются *равными*, если их линии действия параллельны, длины равны и порядок точек задает одно и то же направление на их линиях действия, или, другими словами, если они совмещаются параллельным переносом.) Такого рода векторы, не имеющие ни определенной линии действия, ни определенной точки приложения, называют свободными. Например, вектор магнитной индукции постоянного магнитного поля или вектор скорости одной инерциальной системы относительно другой – свободные векторы; их можно считать приложенными к любой точке. Математики, как правило, тоже изучают свободные векторы; простейший пример – вектор, задающий параллельный перенос: приложенный к любой точке, он указывает своим концом образ этой точки при данном переносе.

2°. С другой стороны, встречаются такие физические величины, что изображающие их векторы не могут быть отделены от своей точки приложения. Такого рода векторы называются связанными (или закрепленными). Так, вектор мгновенной скорости движущейся точки в данный момент времени – пример связанного вектора. Его нельзя отделить от движущейся точки (если, конечно, все остальные точки пространства не перемещаются с той же скоростью).

3°. Наконец, может случиться, что два геометрически равных вектора изображают равные физические величины лишь при условии, что эти векторы имеют одну и ту же линию действия, и изображают не равные физические величины, если они имеют различные линии действия. Таковы, например, векторы, изображающие силы, действующие на твердое тело. Такие неотделимые от линии действия векторы называются *скользящими*. Это, так сказать, «настоящие» силовые векторы, реально действующие не на абстрактные «бесконечно малые» тела, а на жесткие предметы, имеющие определенные размеры и форму. Заметим, что здесь условие жесткости тела существенно: тело не растягивается и не сжимается, без потерь передает усилие вдоль линии действия, поэтому не важно, к какой именно точке на линии действия приложена сила; точка приложения может как бы скользить по линии действия.

О скользящих векторах и пойдет наш рассказ. В дальнейшем слово «вектор» без определения следует понимать именно как «скользящий вектор»; а когда речь пойдет о свободных или закрепленных векторах, это будет оговорено.

Мы будем обозначать (скользящие) векторы либо одной полужирной буквой, например \mathbf{v} , либо двумя буквами с чертой сверху, например \overline{AB} . Свободные же векторы мы будем обозначать буквами со стрелками, например \vec{v} или \overrightarrow{AB} .

Системы скользящих векторов

Итак, (скользящий) вектор $\mathbf{v} = \overline{AB}$ задается прямой $l = AB$ — своей линией действия — и направленным отрезком AB , лежащим на этой прямой. Два вектора $\mathbf{v} = \overline{AB}$ и $\mathbf{u} = \overline{CD}$ считаются совпадающими, если они задают один и тот же свободный вектор ($\overline{AB} = \overline{CD}$) и, кроме того, у них одна и та же линия действия (прямые AB и CD совпадают).

В дальнейшем нас будут интересовать не отдельно взятые векторы, а конечные системы векторов $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$, ведь именно такие системы отвечают системам сил, действующим на твердое тело. Порядок перечисления векторов, разумеется, не существен; однако один и тот же вектор может встречаться в системе несколько раз, и его нужно считать столько раз, сколько он в ней встречается.

Наша цель — научиться преобразовывать системы друг к другу, сводить — если это возможно — произвольную систему к системам простейшего вида. Для этого нам потребуются

Элементарные операции и эквивалентность систем векторов

Когда линии действий двух векторов \mathbf{v} и \mathbf{u} пересекаются, эти векторы можно сложить естественным образом: если $\mathbf{u} = \overline{AB}$, $\mathbf{v} = \overline{AC}$ (A — общая точка линий действия), то суммой $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ векторов \mathbf{u} и \mathbf{v} называется вектор $\mathbf{w} = \overline{AD}$, где точка D

получена сложением $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$ по правилу параллелограмма (рис. 1, а). Такое сложение «пересекающихся» векторов будет нашей первой элементарной операцией; она сводит систему из двух векторов (\mathbf{u}, \mathbf{v}) к системе из одного вектора (\mathbf{w}) .

У этой операции есть обратная: если дан любой вектор $\mathbf{v} = \overline{AB}$, то можно выбрать две произвольные прямые, проходящие через любую точку линии действия (скажем, через точку

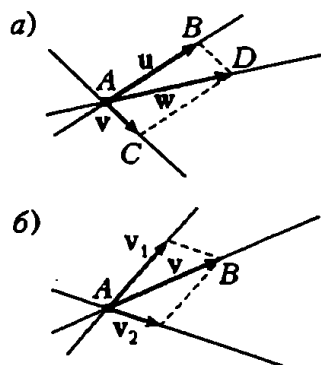


Рис. 1

А), и разложить вектор \overline{AB} по правилу параллелограмма (рис.1,6). Из одного вектора (v) мы получим систему из двух векторов (v_1, v_2).

Обратите внимание, что складывать можно только векторы, чьи линии действия пересекаются или совпадают. Особенно просто складываются векторы с общей линией действия. В частности (рис.2), так складываются два противоположных вектора, т.е. векторы вида $v = \overline{AB}$ и $-v = \overline{BA}$; их суммой будет нуль-вектор $0 = \overline{AA}$.

Наша вторая элементарная операция состоит в *уничтожении нуль-вектора*, т.е. в переходе от системы вида $(v_1, v_2, \dots, v_k, v, -v)$ к системе (v_1, v_2, \dots, v_k) . В частности (при $k = 0$), простейшая система $(v, -v)$ сводится к пустой или нулевой системе, которую мы будем обозначать так же, как нуль-вектор — через 0 .

У второй элементарной операции тоже есть обратная — *рождение нуль-вектора*, т.е. переход от системы (v_1, v_2, \dots, v_k) к системе $(v_1, v_2, \dots, v_k, v, -v)$, где v — произвольный вектор.

Мы будем говорить, что две системы векторов (u_1, u_2, \dots, u_k) и (v_1, v_2, \dots, v_l) *эквивалентны*, или *приводятся друг к другу*, если от одной системы к другой можно перейти с помощью конечной последовательности элементарных операций.

С точки зрения механики понятно, почему мы интересуемся элементарными операциями и эквивалентными системами. Ведь две эквивалентные системы сил всегда оказывают одинаковое воздействие на твердое тело, в чем можно убедиться не только экспериментально, а просто продумав физический смысл элементарных операций. Приводя же сложные системы к более простым, мы получаем возможность легко разобраться в том, какое именно результирующее воздействие данная сложная система сил оказывает на твердое тело.

Простейшие системы на плоскости; пары

Рассмотрим теперь подробнее приведение систем векторов к более простым для случая систем векторов на плоскости.

На рисунке 3 показано, как с помощью элементарных операций осуществляется приведение некоторых простейших систем векторов к другим таким системам. Мы советуем читателю

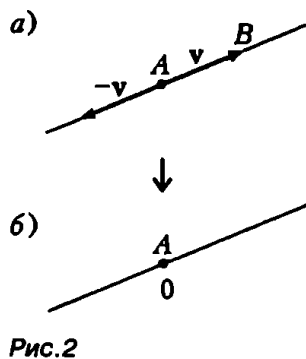
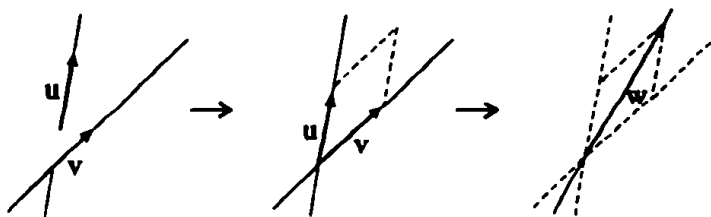
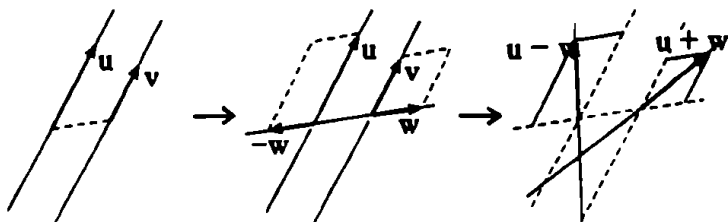


Рис.2

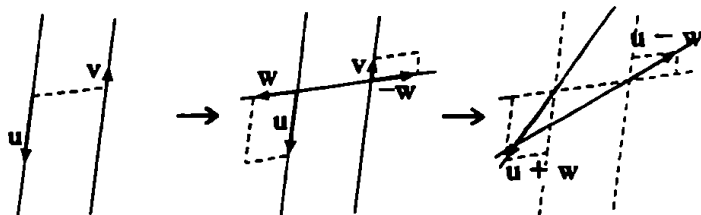
Простейшие преобразования плоских систем:



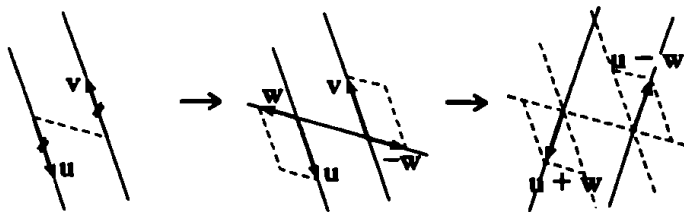
а) два пересекающихся вектора \rightarrow один вектор;



б) два сонаправленных вектора \rightarrow два пересекающихся вектора;



в) два противоположных вектора разной длины \rightarrow два пересекающихся вектора;



г) два противоположных вектора равной длины \rightarrow (пара) другая пара.

Рис.3

внимательно проследить за всеми операциями и даже проделать их самостоятельно на бумаге.

Особое внимание следует обратить на рисунок 3,г. На нем показаны системы из двух противоположных векторов равной длины на параллельных линиях действия; такие системы коротко называют *парами*. Из рисунка видно, что пары не удаётся

упростить, а можно только «вернуть», превратить в другую пару.

На рисунке 4 показана еще одна серия элементарных операций. Здесь происходит не упрощение исходной системы (из

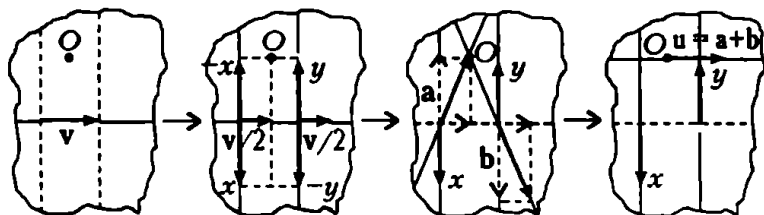


Рис.4

одного вектора), а ее усложнение: из данного вектора мы получаем вектор с другой линией действия и пару; впрочем, если этот рисунок прочитать в обратном порядке (а это осмысленно, ибо каждая элементарная операция имеет обратную), мы получим упрощение (система, состоящая из пары и вектора, приводится к системе из одного вектора). Переход $(v) \rightarrow (u, x, y)$ стоит запомнить, он нам потребуется несколько позже.

Заметим еще, что приемы приведения плоских систем бывают полезны и при рассмотрении пространственных задач. Так, пространственная система (λ, p, μ, τ) ($\lambda = -\tau$, $|p| = |\mu|$) применением операции разложения вектора приводится (рис.5,а) к паре (u, v) : $\lambda = a + v$, $\mu = b + u$, а плоская система (a, b, λ, τ) , остающаяся после выделения из системы (λ, p, μ, τ) пары (u, v) (рис.5,а), как легко видеть, приводится к нулю (рис.5,б).

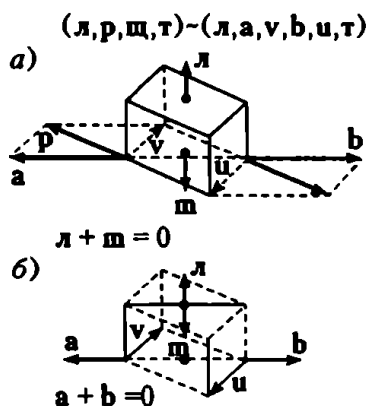


Рис.5

Момент вектора и момент пары

Выше мы видели, что пару векторов нельзя привести к одному скользящему вектору. Однако пара допускает удобную векторную характеристику. Чтобы получить ее, нам придется начать издалека.

Пусть дан вектор $v = \overline{AB} \neq 0$ и точка O , не лежащая на его линии действия; тогда *моментом вектора v относительно точки O* называется (закрепленный!) вектор OM (приложен-

ный к точке O) с линией действия, перпендикулярной плоскости OAB , длины $OM = r \cdot |v|$ (где r – плечо вектора v относительно O , т.е. расстояние от O до прямой AB) и направленный так,

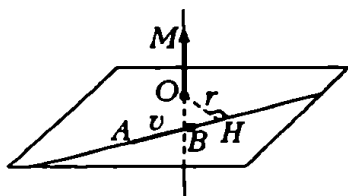


Рис.6

чтобы направление вращения v вокруг O , наблюдаемое из точки M , было положительным (против часовой стрелки; рис.6); если точка O лежит на линии действия вектора v , или $v = 0$, то момент принимается равным нулю. Момент вектора играет важную роль в механике при

изучении вращательного движения и имеет красивые приложения в геометрии.

Пусть теперь дана пара векторов $v = \overline{AB}$, $v' = \overline{A'B'}$ и точка O ; пусть OM и OM' – моменты v и v' относительно O . Тогда легко проверить (сделайте это!), что длина и направление суммы моментов относительно точки O векторов v и v' не зависят от выбора этой точки, т.е. эта сумма является свободным вектором. Его называют (векторным) моментом пары (v, v') . Легко проверяется, что длина векторного момента пары (v, v') равна $d \cdot |v|$, где d – расстояние между параллельными прямыми AB и $A'B'$. Пользуясь этим, а также утверждением задачи 3, нетрудно доказать, что пара приводится к нулю тогда и только тогда, когда ее векторный момент равен нулю.

Приведение плоских систем к паре или вектору

Мы сейчас докажем следующую замечательную теорему.

Теорема. *Всякая (конечная) система (скользящих) векторов на плоскости приводится либо к одному вектору, либо к паре.*

Доказательство. Если данная система состоит из одного вектора – теорема доказана. Если в системе есть векторы с пересекающимися линиями действия, то их можно попарно упрощать (см. рис.3,а), пока не останутся лишь векторы с параллельными линиями действия. Если таких векторов три или более, то по крайней мере два из них сонаправлены, и мы можем упрощать систему дальше (см. рис.3,б). Таким образом, переходы 3,б и 3,а позволяют нам свести доказательство теоремы к случаю двух противоположно направленных векторов с параллельными линиями действий. Если длины векторов различны, то переход 3,в с последующим переходом 3,а даст

нам один вектор, а если длины равны, то мы получили пару; теперь теорема доказана полностью.

Заметим, во-первых, что доказательство не только устанавливает справедливость теоремы, но и дает эффективный способ для того, чтобы найти вектор (или пару), эквивалентный исходной системе. Во-вторых, если заранее выбрать некоторую фиксированную точку, то можно так проводить наши элементарные операции, чтобы привести данную систему к системе из одной пары и одного вектора, чья линия действия проходит через эту точку. Действительно, это верно, если система приводится к одной паре. Если же она приводится к одному вектору, то операция, показанная на рисунке 4, позволяет привести этот вектор к паре и вектору, чья линия действия проходит через заданную точку.

Исчисление систем векторов; базис

Мы научились приводить системы плоских векторов к простейшим системам. Однако оказывается, что системы можно не только приводить одну к другой, но и выражать одну через другие. При этом возникает исчисление систем векторов, очень похожее на обычное исчисление свободных векторов в пространстве.

Чтобы описать это исчисление, определим сумму двух систем $N = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ и $M = (v_1, v_2, \dots, v_l)$ как их «свободное объединение», т.е. систему

$$L = N + M = (u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_l)$$

(равенство систем векторов понимается здесь и ниже как их эквивалентность), и *произведение системы N на число λ* – как новую систему

$$\lambda N = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_k),$$

где λu обозначает вектор с той же линией действия, что u , длины $|\lambda| \cdot |u|$, направленный так же, как u , если $\lambda > 0$, и в противоположную сторону, если $\lambda < 0$.

Скажем, что система N *линейно выражается* через системы M_1, \dots, M_n , если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, такие что

$$N = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_n M_n.$$

Рассмотрим теперь случай систем на плоскости. Пусть O – произвольная точка плоскости, I и J – одновекторные системы, состоящие из ненулевых неколлинеарных векторов, приложенных к точке O , а K – любая (ненулевая) пара. Тогда системы I, J, K образуют *базис* в множестве систем плоских векторов, т.е. любая система N однозначно линейно выражается через I, J, K :

$$N = \alpha I + \beta J + \gamma K$$

(числа α, β, γ однозначно определены системой N при фиксированных I, J, K).

Читатель, знакомый с понятием векторного пространства, конечно, понял, что это утверждение означает, что *множество классов эквивалентных систем (скользящих) векторов на плоскости относительно операций, определенных выше, образует векторное пространство размерности 3*.

* * *

Дойдя до этого места, авторы серьезно задумались, а потом заспорили: о каких именно приложениях теории скользящих векторов рассказать? Где только эта теория не используется! В статике (теория ферм и веревочных многоугольников), в строительной механике, в кинематике и динамике твердого тела, а ее обобщения используются в некоторых новейших разделах геометрии. Но нельзя объять необъятное. Здесь мы приведем только один пример – из кинематики твердого тела, а также, в конце статьи, ряд задач.

Вращение твердого тела

Здесь нас интересует такая *кинематическая задача*: как описать движение твердого тела, вращающегося около некоторой оси, если эта ось в свою очередь вращается вокруг неподвижной оси? Мы будем считать задачу решенной, если дан способ нахождения вектора скорости любой наперед заданной точки тела (относительно неподвижной системы отсчета).

Ответ красиво формулируется в терминах скользящих векторов. Однако прежде чем его привести, мы немного расскажем о том, как вообще может двигаться твердое тело. Начнем с простейших примеров.

При *равномерном прямолинейном движении* твердое тело перемещается с постоянной скоростью в фиксированном направлении. При этом векторы скорости во всех точках одинаковы, их направление и величина неизменны во времени. Все точки движутся по прямым. Движение характеризуется одним *свободным* вектором скорости \vec{v} .

При *равномерном вращательном движении* тело движется с неизменной угловой скоростью около неподвижной оси. При этом вектор скорости любой точки на оси вращения – нулевой, а вектор скорости любой другой точки перпендикулярен плоскости, проходящей через эту точку и ось, и по величине пропорционален расстоянию от точки до оси. Точки оси остаются на месте, а остальные точки двигаются по окружностям с центрами на оси. Такое движение характеризуется одним (*скользящим*) вектором

ω – угловой скоростью вращения, линия действия которого совпадает с осью вращения.

При *равномерном винтовом движении* тело равномерно вращается около оси (называемой винтовой осью) и одновременно равномерно перемещается вдоль нее. Вектор скорости каждой точки равен сумме вектора вращательного движения и вектора прямолинейного движения (рис.7). Точки тела описывают винтовые линии, лишь точки винтовой оси движутся прямолинейно вдоль нее самой. Движение характеризуется двумя векторами (\vec{v}, ω): (свободным) вектором перемещения \vec{v} и (скользящим) вектором угловой скорости ω (рис.7).

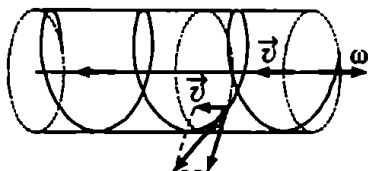


Рис.7

Возможные движения твердого тела в пространстве не исчерпываются, конечно, приведенными примерами, хотя бы потому, что в реальной ситуации векторы \vec{v} и ω могут меняться во времени. Однако имеет место вот какой замечательный факт (см. задачу 10): сколь бы сложное движение ни совершало твердое тело, мгновенное распределение скоростей его точек будет таким же, как при одном из трех перечисленных выше типов движения.

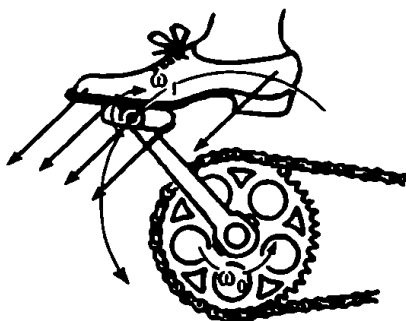


Рис.8

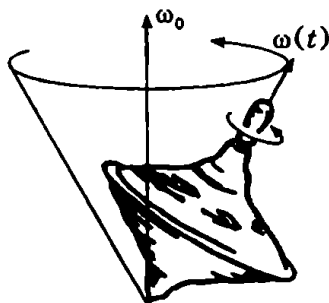


Рис.9

Отметим, кстати, что прямолинейное и вращательное движения можно считать частными случаями винтового. Два конкретных примера таких более сложных движений показаны на рисунках 8 и 9.

Вернемся теперь к нашей изначальной кинематической задаче: предположим, что подвижная ось $M_t N_t$ твердого тела вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 около неподвижной оси AB , а само тело к тому же вращается вокруг оси $M_t N_t$ с постоянной по величине угловой скоростью ω_1 . (Подчеркнем,

что как скользящий вектор эта угловая скорость переменная, $\omega = \omega_1(t)$, — меняется положение ее линии действия $M_t N_t$.) Как описать результирующее движение? Ответ зависит от взаимного расположения осей AB и $M_t N_t$,

1°. Оси совпадают. Тогда тело вращается около неподвижной оси $AB = M_t N_t$ с постоянной угловой скоростью $\omega = \omega_0 + \omega_1$. (Пример: движение часовой или минутной стрелки часов, лежащих на Северном полюсе.)

2°. Оси параллельны, причем $\omega_0 \neq -\omega_1$. Тогда в любой момент t скорости всех точек тела такие же, как если бы оно равномерно вращалось с угловой скоростью $\omega = \omega_0 + \omega_1$ (здесь

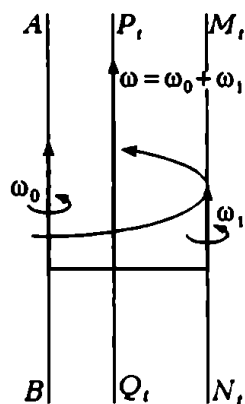


Рис. 10

имеется в виду сумма скользящих векторов — см. рис.3 и рис.10) вокруг линии действия $P_t Q_t$ вектора ω . Говорят, что тело имеет *мгновенную угловую скорость* ω и *мгновенную ось вращения* $P_t Q_t$. В данном случае мгновенная ось вращается вокруг неподвижной оси AB , оставаясь ей параллельной.

3°. Оси параллельны, причем $\omega_0 = -\omega_1$. Тогда тело совершает *поступательное* движение с вектором скорости \bar{v} , равным моменту пары (ω_0, ω_1) , т.е. в любой момент t скорости всех точек тела одинаковы и равны \bar{v} . (Пример: движение подвижной части педали; рис.8.)

4°. Оси пересекаются. Этот случай аналогичен 2°: в любой момент t тело имеет мгновенную ось вращения и мгновенную угловую скорость $\omega = \omega_0 + \omega_1$. Разница в том, что здесь мгновенная ось описывает не цилиндр, а конус с вершиной в неподвижной точке тела — точке пересечения осей. (Пример: прецессионное движение волчка; рис.9.)

5°. Оси скрещиваются. В этом случае тело имеет, так сказать, «мгновенную винтовую ось»; подробнее об этом см. в задачах 7, 8.

Мы видим, таким образом, что решение нашей кинематической задачи коротко и просто формулируется в терминах сложения скользящих векторов. Несложные доказательства утверждений 1°–4° мы оставляем читателю в качестве упражнений.

Разные задачи

1. Назовем *главным вектором системы* скользящих векторов (v_1, \dots, v_n) сумму равных им свободных векторов $\bar{v}_1 + \dots + \bar{v}_n$, а *главным моментом* этой системы относительно точки O — сумму моментов

векторов v_1, \dots, v_n относительно O . Докажите, что у любых двух эквивалентных систем главные векторы и главные моменты относительно одной и той же точки O совпадают.

2. Покажите, что любая система векторов, расположенных в одной плоскости, эквивалентна трем векторам, направленным вдоль сторон треугольника, произвольно выбранного в той же плоскости.

3. Докажите, что плоская система векторов, перпендикулярных к сторонам выпуклого n -угольника в их серединах, эквивалентна нулю, если длины векторов пропорциональны соответствующим сторонам и все векторы обращены внутрь многоугольника (или все наружу).

4. Сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное утверждению предыдущей задачи, для тетраэдра.

5°. Покажите, что любая система векторов пространства эквивалентна шести векторам, направленным по ребрам произвольно выбранного тетраэдра.

6°. Покажите, что любая система векторов пространства эквивалентна системе, состоящей из одного вектора (проходящего через произвольно выбранную точку) и из одной пары. Выведите отсюда, что системы скользящих векторов в пространстве, рассматриваемые с точностью до эквивалентности, образуют шестимерное векторное пространство.

Указание. Сначала приведите систему к трем скользящим векторам, проходящим через три произвольно выбранные точки (раскладывая каждый вектор системы по трем направлениям), затем к двум векторам, один из которых проходит через данную точку, и, наконец, примените построение из рисунка 4.

7. Твердое тело вращается с угловой скоростью ω около оси, которая в свою очередь движется равномерно и прямолинейно со скоростью \bar{v} . Докажите, что тело: а) совершает винтовое движение, если $\omega \parallel \bar{v}$; б) имеет мгновенную ось вращения, если $\bar{v} \perp \omega$; в) имеет мгновенную винтовую ось, если \bar{v} не параллельно и не перпендикулярно ω (это значит, что все точки некоторой прямой – «винтовой оси» – имеют одинаковые скорости \bar{v}_1 , направленные вдоль этой оси, а векторы скорости остальных точек равны сумме вектора \bar{v}_1 и вектора скорости мгновенного вращения данной точки около винтовой оси).

8°. Покажите, что в случае скрещивающихся осей AB и M_1N_1 в кинематической задаче, рассмотренной выше, тело имеет мгновенную винтовую ось, параллельную вектору $\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1$, и пересекающую общий перпендикуляр осей AB и M_1N_1 . Уточните положение мгновенной винтовой оси и вектор скорости вдоль оси.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7.

9°. Опишите результирующее движение тела, совершающего мгновенное винтовое движение относительно оси, которая в свою очередь совершает винтовое движение относительно некоторой неподвижной оси.

10*. Докажите, что как бы ни двигалось твердое тело, в любой данный момент распределение скоростей его точек такое же, как если бы оно совершало равномерное (прямолинейное, вращательное или винтовое) движение.

11. Пользуясь тем, что момент вектора \overline{AB} относительно точки O равен по величине удвоенной площади треугольника OAB , докажите, что множество точек внутри выпуклого многоугольника, для которых постоянна сумма расстояний до его сторон (точнее, прямых, содержащих стороны), есть либо отрезок, либо весь многоугольник, либо пустое множество.

Когда в товарищах согласия нет...

Вернемся теперь к басне. Предположим, что тяжелый воз, по форме напоминающий прямоугольный параллелепипед, стоит на дороге. На него действует сила тяжести t , которую можно считать приложенной к центру тяжести, но она компенсируется реакцией опоры: воз стоит на месте. Но вот явились преисполненные благих намерений товарищи: Лебедь, Рак и Щука и стали тянуть воз с силами $л$, $р$ и $щ$ (см. рис.5). Что же произойдет?

Вооруженные теорией, мы теперь можем ответить на этот вопрос. Система сил ($л$, $р$, $щ$, t) – как и любая другая – приводится к паре и вектору (см. задачу 6). Как их найти? А мы это уже сделали, когда разбирали пример рисунка 5. У нас получилась пара (u , v) в горизонтальной плоскости. И теперь ясно, что будет: не сходя с места, воз начнет вращаться там, где стоял. Мы можем поэтому с уверенностью подтвердить слова И.А.Крылова: ...**Да только воз и ныне там!**

СТАРЫЙ АЛГОРИТМ

Различные способы извлечения квадратных корней «вручную» существуют с древних времен. Я расскажу тебе об одном таком способе, который был создан еще в XV веке и на протяжении долгих лет честно служил и школьникам, и ученым.

Чтобы освоить этот способ, достаточно разобрать несколько примеров.

Сначала рассмотрим случай, когда корень извлекается нацело, т.е. когда число является полным квадратом. Найдем, например, корень из числа 294 849.

Разобьем цифры, входящие в это число, справа налево на группы по две цифры (рис.1,*а*). Самую левую группу назовем первой, следующую – второй и т. д. Общее число образовавшихся групп определяет число цифр искомого корня.

Первая цифра находится как целочисленное значение корня из первой группы с недостатком. В нашем случае – это цифра 5. Записываем ее в ответ, затем возводим в квадрат, вычитаем из первой группы и сносим к результату вычитания следующую группу. (Если результат вычитания – нуль, то просто сносим следующую группу.) В рассматриваемом примере получится число 448 (рис.1,*б*).

Переходим к определению второй цифры. Для этого слева от полученного числа 448 проводим вертикальную прямую и записываем за ней на место десятков удвоенную первую цифру: $2 \times 5 = 10$ (рис.1,*в*).

На место единиц ставим самую большую цифру a , для которой разность $448 - 10a \cdot a$ неотрицательна, т.е. положительна или равна нулю. Ясно, что в нашем случае это цифра 4. Заносим эту цифру в ответ (рис.1,*г*).

Умножаем 104 на 4 и записываем результат справа от вертикальной черты. Вычисляем разность $448 - 416 = 32$ и сносим к ней следующую группу. В результате получаем число 3249 (рис.1,*д*).

$$a) \quad \sqrt{29\ 48\ 49}$$

$$b) \quad \begin{array}{r} \sqrt{29\ 48\ 49} = 5 \\ - 25 \\ \hline 4\ 48 \end{array}$$

$$в) \quad \begin{array}{r} \sqrt{29\ 48\ 49} = 5 \\ - 25 \\ \hline 10 \overline{) 4\ 48} \end{array}$$

$$з) \quad \begin{array}{r} \sqrt{29\ 48\ 49} = 54 \\ - 25 \\ \hline 104 \overline{) 4\ 48} \end{array}$$

$$d) \quad \begin{array}{r} \sqrt{29\ 48\ 49} = 54 \\ - 25 \\ \hline 104 \overline{) 4\ 48} \\ \times \quad 4 \quad \overline{) 4\ 16} \\ \hline 32\ 49 \end{array}$$

$$е) \quad \begin{array}{r} \sqrt{29\ 48\ 49} = 543 \\ - 25 \\ \hline 104 \overline{) 4\ 48} \\ \times \quad 4 \quad \overline{) 4\ 16} \\ \hline 108 \overline{) 32\ 49} \end{array}$$

$$ж) \quad \begin{array}{r} \sqrt{29\ 48\ 49} = 543 \\ - 25 \\ \hline 104 \overline{) 4\ 48} \\ \times \quad 4 \quad \overline{) 4\ 16} \\ \hline 1083 \overline{) 32\ 49} \\ \times \quad 3 \quad \overline{) 32\ 49} \\ \hline 0 \end{array}$$

Рис. 1

Третья цифра находится так же, как и вторая: умножаем 54 на 2 и полученный результат – число 108 – записываем слева от вертикальной черты на место десятков. На место единиц ставим самую большую цифру b , для которой разность $3249 - 108b \cdot b$ неотрицательна. Подбором убеждаемся, что для $b = 3$ эта разность равна нулю. Заносим $b = 3$ в ответ (рис.1,е).

Умножаем 1083 на 3, записываем результат справа от вертикальной черты и вычитаем его из 3249 (рис.1,ж). Так как разность равна нулю, процесс вычисления корня окончен.

А теперь, глядя на рисунки 2 и 3, попробуйте самостоятельно повторить все шаги, необходимые для вычисления квадратных корней $\sqrt{212521}$ и $\sqrt{165649}$.

До сих пор мы рассматривали числа с четным числом цифр. Если же общее число цифр нечетно, то первая группа слева будет состоять только из одной цифры (рис.4,5).

Ну а что же делать, если число не является полным квадратом? Алгоритм в этом случае не меняется, нужно лишь правильно подготовить число. Итак, пусть N – некоторое число (не обяза-

$$\sqrt{21\ 25\ 21} = 461$$

		21	25	21	
		- 16			
x	86	5	25		
	6	- 5	16		
		921		9 21	
x	1	- 9	21		
		0			

Рис.2

$$\sqrt{16\ 56\ 49} = 407$$

		16	56	49	
		- 16			
x	80	5	6		
	0	- 00			
		807		56 49	
x	7	- 56	49		
		0			

Рис.3

$$\sqrt{1\ 46\ 41} = 121$$

		1	46	41	
		- 1			
x	22	4	6		
	2	- 4	4		
		241		2 41	
x	1	- 2	41		
		0			

Рис.4

$$\sqrt{5\ 33\ 61} = 231$$

		5	33	61	
		- 4			
x	43	1	33		
	3	- 1	29		
		461		4 61	
x	1	- 4	61		
		0			

Рис.5

тельно целое), представленное десятичной дробью, и мы хотим вычислить корень из него с точностью до $\frac{1}{10^m}$, т.е. хотим найти цифры в десятичном представлении искомого корня до m -го знака после запятой включительно. Тогда мы поступаем следующим образом. Цифры, входящие в целую часть числа N , разбиваем на группы по две цифры в каждой справа налево, а цифры, образующие дробную часть, разбиваем на такие же группы, но уже слева направо. Если общее число цифр в целой части нечетно, то первая группа слева будет состоять из одной цифры, если же нечетно число цифр в дробной части, то к последней цифре справа приписываем нуль. Когда число групп в дробной части больше m , мы отбрасываем лишние группы справа, когда оно меньше m , мы составляем недостающие группы из нулей. Теперь все готово, чтобы использовать наш алгоритм. На рисунках 6 и 7 показано вычисление квадратных корней $\sqrt{2}$ и $\sqrt{12,5}$ с точностью до $\frac{1}{1000}$.

Чтобы проверить, освоили ли вы этот алгоритм, проделайте следующее упражнение: вычислите с точностью до $\frac{1}{1000}$ квад-

$$\begin{array}{r} -1 \\ 24 \overline{) 100} \\ \underline{4} \\ 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 281 \\ \times 1 \\ \hline 2824 \end{array} \quad \begin{array}{r} 400 \\ - \\ 281 \\ \hline 11900 \\ - \\ 11296 \\ \hline 604 \end{array} \end{array}$$

Рис. 6

$$\begin{array}{r} - 9 \\ \times 65 \overline{) 350} \\ \underline{325} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 703 \\ \times 3 \\ \hline 7065 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25\ 00 \\ - 21\ 09 \\ \hline 391\ 00 \end{array} \\ \begin{array}{r} 7065 \\ \times 5 \\ \hline 35325 \end{array} \quad \begin{array}{r} 391\ 00 \\ - 35325 \\ \hline 3775 \end{array} \end{array}$$

Рис.7

ратные корни $\sqrt{18769}$, $\sqrt{24336}$, $\sqrt{35721}$, $\sqrt{232324}$, $\sqrt{243049}$,
 $\sqrt{104,2441}$, $\sqrt{1867,1041}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$.

Мы не будем заниматься обоснованием описанного алгоритма. Заметим лишь, что получение каждой новой цифры связано с возрастающим объемом вычислений, поэтому алгоритм разумно применять тогда, когда требуемая точность не превышает трех-четырех значащих цифр (чего, как правило, достаточно для практических расчетов).

Точность вычислений с использованием указанного алгоритма можно повысить, если воспользоваться следующим утверждением:

Если после вычисления n значащих цифр корня остаток от извлечения разделить на удвоенное найденное значение корня, то частное дает $n - 1$ следующих цифр корня.

Докажем это утверждение. Предположим вначале, что число a , из которого извлекается корень, имеет целую часть из n групп. Пусть найдено n первых цифр корня, образующих число c . Тогда $\sqrt[n]{a} = c + x$, где x — дробная часть корня, которую нужно найти. Следовательно,

$$\frac{a - c^2}{2c} = x + \frac{x^2}{2c}.$$

Разность $a - c^2$ — это и есть остаток, который получается после нахождения n цифр корня. Дробь $\frac{a - c^2}{2c}$ представляет собой то самое частное, о котором говорится в утверждении.

Поэтому

$$x = \frac{a - c^2}{2c} - \frac{x^2}{2c}.$$

Считая $x = \frac{a-c^2}{2c}$, мы допускаем погрешность, равную $\frac{x^2}{2c}$. Так как $x < 1$, $a \geq 10^{n-1}$, имеем

$$\frac{x^2}{2c} < \frac{1}{2 \cdot 10^{n-1}},$$

что и требовалось. Если запятая, отделяющая целую и дробную части в числе a , стоит не там, где мы ее предполагали, то ее всегда можно перенести на надлежащее место, производя умножение или деление числа a на некоторую степень 10 с четным показателем, а потом разделив или умножив найденный корень на степень 10 с показателем, вдвое меньшим.

Рассмотрим пример. Вычислим $\sqrt{2}$ с семью значащими цифрами, т.е. с шестью цифрами после запятой. Ранее мы вычислили $\sqrt{2}$ с тремя знаками после запятой (см. рис.6). Деление остатка на удвоенное значение корня даст следующие три $\sqrt{2} = \sqrt{2,00\,00\,00} = 1,414\,213$ (рис.8).

[illegible]

Рис.8

Конечно, в наше время, когда почти каждый первоклассник носит в портфеле микрокалькулятор, нелегко удивить школьника ручным способом извлечения квадратного корня. Но мы все же надеемся. Известный американский математик академик Грехем вспоминал, что сильный интерес к математике он почувствовал впервые в начальной школе, увидев тот самый алгоритм по извлечению квадратных корней, о котором мы сейчас рассказывали. Его заинтересовало,

возможно ли сделать что-нибудь похожее для кубических корней и корней более высоких степеней. Он нашел аналогичный способ решения, и с тех пор математика навсегда вошла в его жизнь.

Ю.П.Соловьев

ИЗБРАННЫЕ СТАТЬИ

Редактор *А.Ю.Котова*

Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ИБ № 68

Подписано к печати 06.01.04. Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр.

Гарнитура кудряшевская. Печать офсетная. Объем 4 печ.л.

Тираж **4000** экз. Заказ **3997**.

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А,
«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени

ГУП «Чеховский полиграфический комбинат»

Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и
средств массовых коммуникаций

142300, г.Чехов Московской области

Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536